第一次作业答案

1. 列出科学计算中误差的三个来源, 并说出截断误差与舍入误差的区别.

   答: 科学计算中的误差有: 模型误差: 代表数学模型与实际问题之间的误差; 截断误差: 近似解与精确解之间的误差, 例如可微函数在泰勒展开时, 保留前 n 项作为近似, 实际表达-近似表达就是截断误差; 舍入误差: 由于计算机字长有限导致数据在计算机上的表达和实际有差别, 计算过程中也可能产生新的误差, 成为舍入误差. 截断误差是由采用的数值方法导致的, 而舍入误差是由计算机计算时产生的.

2. 什么是绝对误差与相对误差? 什么是近似数的有效数字? 它与绝对误差和相对误差有什么关系?

   答:

$$e^* = x^* - x,$$

$$e_r^* = \frac{x^* - x}{x}.$$

   近似数的有效数字: 若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位, 该位到第一个非零数字共有 n 位, 就称 x^* 共有 n 位有效数字.

   有效数字越多, 绝对误差限越小, 相对误差限也越小.

3. 什么是算法的稳定性? 如何判断算法稳定? 为什么不稳定算法不能使用?

   答: 如果一个算法在输入初始数据时有误差, 而在结算过程中误差不增长, 则称算法具有稳定性.

   如果初始数据的误差在计算中增长很快, 则算法是不稳定的.

   如果使用不稳定的算法, 会导致初始数据的误差逐步扩大, 导致结果不可靠, 所以不稳定算法不能使用.

4. 什么是问题的病态性? 它是否受所用算法的影响?

   答: 问题的病态性是指, 对于一个问题, 如果初始数据的微小误差就会导致结果的误差很大, 则问题是病态的.

   问题的病态性是问题本身的性质, 与所用算法无关.

5. 什么是迭代法? 试利用 $x^3 - a = 0$ 构造计算 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式.

   答: 迭代法是一种按同一公式重复计算, 逐次逼近真值的算法.

   先设定初始值 $x_0 > 0$, 令 $x = x_0 + \Delta x$，$a = (x_0 + \Delta x)^3$, 即

$$x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = a.$$

由于 Δx 是小量, 所以舍去高阶项 $(\Delta x)^2$ 和 $(\Delta x)^3$, 可得:

$$\Delta x = \frac{1}{3}\left(-x_0 + \frac{a}{x_0^2}\right).$$

于是有:

$$x = \frac{1}{3}\left(2x_0 + \frac{a}{x_0^2}\right).$$

所以, 迭代公式为:

$$x_k = \frac{1}{3}\left(2x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}^2}\right), k = 1, 2, \cdots .$$

6. 试改变下列表达式使计算结果比较精确（$\ll$ 表示远小于,$\gg$ 表示远大于）.

(1)

$$\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x},\ |x| \ll 1$$

原式可改写为: $$\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x-(1-x)(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}$$

$$= \frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}.$$

(2)

$$\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}},\ |x| \gg 1$$

原式可改写为: $$\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}} = \frac{x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{2}{x(\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}})}.$$

(3)

$$\frac{1-\cos x}{x}, x \neq 0,\ |x| \ll 1$$

原式可改写为: $$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}.$$

7. 设 $x > 0$,x 的相对误差为 δ, 求 $\ln x$ 的误差.

答: 设 $f(x) = \ln x$,x 的近似值为 x^*, 即 $\delta = x^* - x$
将 $f(x)$ 在 x^* 泰勒展开可得:

$$f(x) - f(x^*) = f'(x^*)(x - x^*) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x^*)^2.$$

ξ 介于 x 与 x^* 之间, 忽略 $x - x^*$ 的高阶项得:

$$f(x^*) - f(x) = f'(x^*)(x^* - x).$$

因为 x 的相对误差为 δ, 所以 $\ln x$ 的误差为:

$$\frac{1}{x} \times \delta \times x = \delta.$$

8. 设 x 的相对误差为 2%, 求 x^n 的相对误差.

   答: 设 $f(x) = x^n$, 则:

$$\because e_r^*\Big(f(x^*)\Big) = \frac{f(x^*) - f(x)}{f(x)}, e_r^*(x^*) = \frac{x^* - x}{x}.$$

$$\therefore \frac{e_r^*\Big(f(x^*)\Big)}{e_r(x^*)} = \frac{xf'(x)}{f(x)} = n, e_r^*\Big(f(x^*)\Big) = n \times 2\% = 0.02n.$$

9. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数, 即误差限不超过最后一位的半个单位, 试指出他们是几位有效数字.

   答:

$x_1^* = 1.1021$, 有 5 位有效数字.

$x_2^* = 0.031$, 有 2 位有效数字.

$x_3^* = 385.6$, 有 4 位有效数字.

$x_4^* = 56.430$, 有 5 位有效数字.

$x_5^* = 7 \times 1.0$, 有 2 位有效数字.

10. 判断下列命题的正确性:

(1) 解对数据的微小变化高度敏感是病态的.
(2) 高精度运算可以改善问题的病态性.
(3) 无论问题是否病态，只要算法稳定都能得到好的近似值.
(4) 用一个稳定的算法计算良态问题一定会得到好的近似值.
(5) 用一个收敛的迭代法计算良态问题一定会得到好的近似值.
(6) 两个相近数相减必然会使有效数字损失.
(7) 计算机上将 1000 个数量级不同的数相加, 不管次序如何结果都是一样的.

答:

(1) 对.
(2) 错, 病态性是问题本身的性质, 不能由高精度算法改善.
(3) 错, 病态问题不能得到很好的近似值.
(4) 错, 如果初始值的误差较大, 最终不能得到好的近似值.
(5) 错, 如果选取的初值误差较大, 则不能得到很好的近似值.

(6) 错, 大多数情况下会导致有效数字减少, 但可以将减法转换成其他运算, 避免有效数字的减少.

(7) 错, 次序不一样结果一般不一样, 特别是数量级相差较大时, 一般将相同数量级的数调整到一起会更准确.