第十二章　期权与公司金融

学习目标

1. 理解期权的基本概念，能够运用风险中性定价法进行期权定价
2. 理解运用期权定价的框架进行投资决策的原理，以及如何运用期权定价模型来进行投资决策
3. 理解实物期权分析法与传统的贴现现金流分析法的不同之处
4. 结合互联网公司投资决策中案例分析，理解实物期权分析法在企业投资决策中的实施方法。

引言

虽然传统的贴现现金流法在资本预算中发挥了巨大的作用，但是当投资决策随着时间的推移而改变时，借助期权定价的分析方法帮助我们进行投资决策往往更为有利。

本章首先介绍期权的基本概念及其运用风险中性定价法进行期权定价的方法，在此基础上，重点讲解为何可以运用期权定价的框架来帮助我们进行投资决策？实物期权分析法与传统的贴现现金流分析法相比，有何不同之处？如何运用期权定价模型来进行投资决策？最后，我们通过实物期权分析法在互联网公司投资决策中运用的案例，详细介绍实物期权分析法在企业投资决策中的实施方法。

第一节　　期权相关概念

一、 期权的概念[①]

期权是一种在交易所以及场外市场进行交易的衍生证券。分为**看涨期权**（**Call Option**）与**看跌期权**（Put Option）。看涨期权是指在将来某一特定的时间以预订的价格（**行权价格**）购买某种资产（通常也称为**标的资产**（Underlying Asset））的权利；而与之相对的，看跌期权是指在将来某一特定的时间以某一特定的价格（**行权价格**）卖出某种资产（**标的资产**）的权利。与期货不同之处在于，期权是一种权利。因此，只有投资者认为盈利时才会行使权利，而当投资者认为亏损时可以放弃该权利。如果按照期权行权的时间来分，可分为**欧式期权**（European Option）及**美式期权**（American Option）。购买了欧式期权的投资者只能在期权的到期日进行行权，而购买了美式期权的投资者可以在到期日之前的任何时点选择最佳时机进行行权。另一种**百慕大式期权**（Bermudan Option）是一种介于欧式期权与美式期权之间的期权，投资者可以选择在期权到期之前的一段时间（如一周）内选择最佳时机进行行权。

正确理解持有期权的投资者在期权到期日的盈利（Pay off），是理解期权概念的重要环

[①] 关于期权的基本概念，可以参考全国金融教指委系列教材中的《投资学》和《金融衍生工具》有关期权的内容。

节。

我们以宝钢股份认购权证为例进行说明。宝钢股份认购权证（宝钢 JTB1）是一种第三方发行的权证（**备兑权证**[①] ）。首发日为 2005 年 8 月 18 日，到期日为 2006 年 8 月 30 日，行权价格为 4.2 元。行权方式为欧式期权。在这个例子中，宝钢 JTB1 的标的资产就是宝钢股份的股票。持有宝钢 JTB1 的投资者有权在 2006 年 8 月 30 日（**到期日**（expiration date）或**满期日**（maturity date））以 4.2 元（行权价格）购买包钢股份的股票。在宝钢 JTB1 的发行日，包钢股份的股票收盘价格为 4.58 元，假如 2006 年 8 月 30 日包钢股份的股票涨到了 5 元，则投资者可以用 4.2 元购买价值 5 元的宝钢股票，其到期日的盈利为 0.8（5 - 4.2）元；而当 2006 年 8 月 30 日的宝钢股票价格跌至 4 元的时候，投资者如果用 4.2 元购买价值 4 元的宝钢股票，将会亏损，因此，投资者可以放弃行权，其到期日的盈利为 0 元。以上分析结果，我们可以用图 12.1 来表示。当到期日宝钢股票的价格超过行权价格 4.2 元时，权证的持有者获得超过 4.2 元的部分，而当到期日宝钢股票的价格跌破行权价格 4.2 元时，放弃行权，投资者的盈利为 0 元。但是，考虑到投资者取得权证时，需要支付其价格（风险溢价）0.688 元，因此，实际盈利为-0.688 元。与之相对应的，我们也可以考虑宝钢股份的认沽权证。如图 12-2 所示，当到期日股票价格跌破行权价格 4.2 元时，认沽权证的持有者获得超额部分，而当到期日的股票价格涨过 4.2 元时，投资者放弃行权，盈利为负，损失即为认沽权证的期权价格 0.257 元。[②]

上述分析结果，我们可以采用数学公式简洁的表述出来。假设到期日股票价格为 S_T，行权价格为 X ，那么，到期日看涨期权的持有者的盈利可以表示为，

$$\max[S_T - X, 0]$$

而看跌期权的持有者在到期日的盈利可以表示为,

$$\max[X - S_T, 0]$$

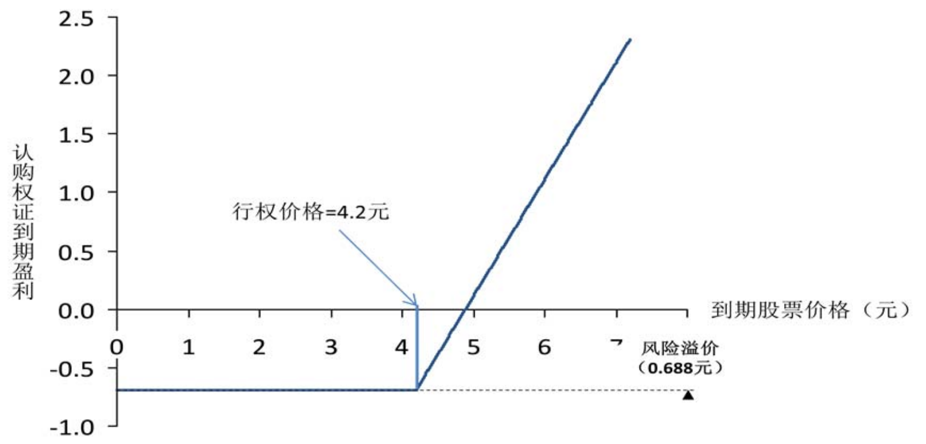


图 12.1　宝钢认购权证到期盈利

[①]**权证**是一种在将来特定的时间以预订的价格（行权价格）购买或卖出标的股票的权利，本质上是期权的一种形式。买入股票的权利被称为**认购权证**，而出卖股票的权利被称为**认沽权证**。认购权证又分为两种，一种是投资者行权时，公司需要发行新股，被称为**认股权证**，而另一类认购权证是有第三方发行的**备兑权证**，投资者行权时公司不需要发行新股，只要将存入专用账户的股权以预订的价格卖给投资者即可。

[②] 这里，认购权证的价格 0.688 由 BS 模型计算而得，而认沽期权的价格 0.257 由看跌-看涨期权评价关系计算得到。

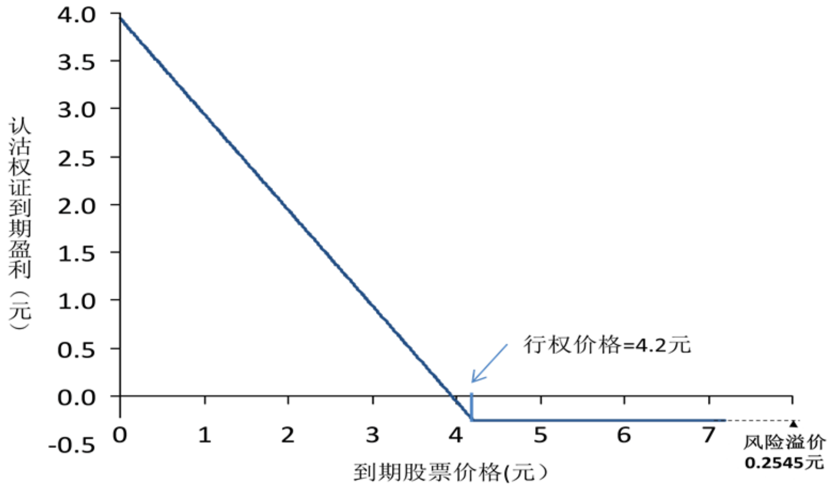


图 12-2 宝钢认沽权证的到期盈利

1. 看跌-看涨平价关系

如果市场上没有套利机会存在，看跌期权与看涨期权在理论上存在一定的关系。假设看涨期权与看跌期权的行权价格均为K，两个期权距离到期的时间间隔为T，在 0 时点看涨期权的价格为C，看跌期权的价格为P，股票价格为S_0。期权到期时的股票价格为S_T，无风险资产利率为r。为了推导看涨期权与看跌期权之间的关系，我们考虑两个投资组合：

- 组合 1: 购买一个欧式看涨期权，同时购买在到期日收益为K的零息票债券。
- 组合 2：购买一个欧式看跌期权，同时购买一股股票。

我们来分析购买这两个组合的投资者分别在 0 时点与期权到期日的现金流。持有组合 1 的投资者，在到期日的现金流分为两种情况，当$S_T \geq K$时，等于$S_T - K + K = S_T$；当$S_T < K$时，等于K。而持有组合 2 投资者在到期时的现金流，当$S_T \geq K$时，等于S_T，当$S_T < K$时等于K。无论是在到期时的股票价格上涨还是下跌，持有组合 1 与持有组合 2 的投资者，均得到同样的收益。如果市场上没有套利机会存在，那么这个组合的现值就必须相等。持有组合 1 的投资者，在时点 0 需要支付的现金流为负的欧式看涨期权价格C，加上零息票债券的现在价格Ke^{-rT}，因此，其总的现金流为$C + Ke^{-rT}$。而持有组合 2 的投资者在 0 时点需要支付的总现金流为$P + S_0$。由此，我们可以得到以下关系。

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

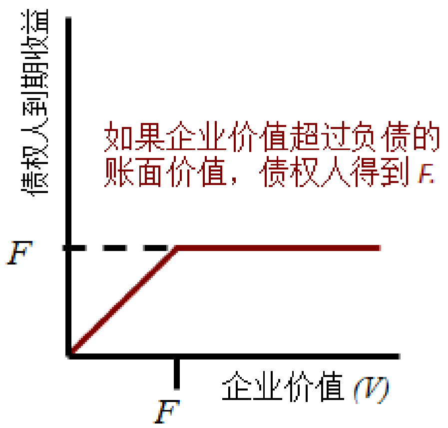
上式被称为**看跌-看涨平价关系**（Put-Call Parity）。该公式表明，在市场不存在套利机会的条件下，具有某个行权价格与到期日的看涨期权的价格可由一个具有相同行权价格与到期日的看跌期权的价格推导出来，反之亦然。假如市场上存在一个与宝钢 JTB1 具有相同行权价格（4.2 元）、相同的到期日（2006 年 8 月 30 日）的认沽权证，那么，我们可以根据宝钢 JTB1 的价格（0.688 元）计算出该认沽权证的价格。假设连续时间无风险资产利率为 0.0122，

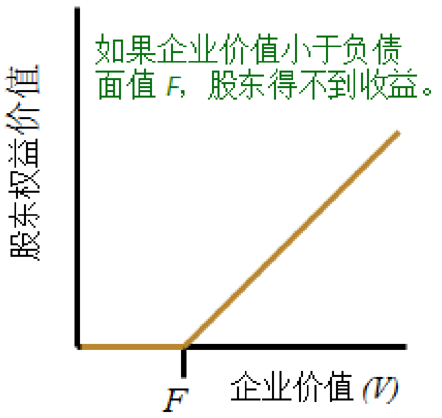
距离到期期限为$377/360$年，2005 年 8 月 18 日的股票价格为 4.58 元，那么我们有，

$$P = 0.688 + 4.2 \times exp^{-0.0122 \times 377} - 4.58 = 0.2545 \text{元}$$

2. 企业股东权益、负债的期权理解

期权并不仅仅出现在金融市场上，由于公司制企业赋予了股东只承担有限责任的权利，我们可以利用期权的概念来理解股东的权益及负债的价值。
负债的基本特征是借债的公司承诺在某一确定的时间支付给债权人一笔固定金额的现金，而股东对企业价值的索取权等于支付给债权人之后的剩余部分。如果企业价值等于或少于承诺





支付给债权人的金额，那么股东得不到任何收益，但是其收益不会为负。我们用图来进一步描述。假设企业价值为V，负债的账面价值为F。由于股东被赋予了有限责任的权利，因此，股东的收益可以表示为$\max[V-F,0]$。如果我们将企业价值V看成是标的资产的话，那么，权益的价值可以看成是行权价格为债务账面价值F的看涨期权。我们用C表示该期权的价值。而债权人的到期收益可以表示为$\min[V,F]=F-\max[F-V,0]$，因此，负债的价值可以看作是负债的账面价值减去行权价格为F的看跌期权的价值。如果我们用P表示看跌期权的价值，则负债的现值等于$PV(F)-P$，$PV(F)$表示负债面值的现在价值。

企业价值等于权益价值加上负债价值，因此我们有，

$$V = C + [PV(F) - P]$$

将上式变形可得，

$$C + PV(F) = V + P$$

这刚好是上述的看跌-看涨期权平价关系，表示了企业的权益、负债中包含的看涨与看跌期权之间的关系。

二、期权定价

由以上分析我们可以看出，期权的持有者在期权到期时的收益一定是大于或等于 0 的，投资者想要获得这种“只赚不赔”的证券，就需要付出一定的风险溢价。投资者如果想要获得将来一定的时间以一定的金额买（卖）某种资产的权利，在现在的时点需要付出多大的成本呢？这就是期权定价要解决的问题。以下我们利用风险中性定价的原理，介绍二叉树模型

（binomial tree）及布莱克-斯科尔斯-默顿模型（Black-Scholes-Merton）。

1. 单期二叉树期权定价模型

我们首先来看一个具体的例子，然后再将其一般化。

考虑一个行权价格为 21 元，3 个月后到期的欧式看涨期权。假设时点 0 的股票价格为 20 元，3 个月后股票的价格可能涨至 22 元，也可能跌至 18 元。假定无风险贴现率 $r=12\%$。根据期权的性质，若股票价格上涨到 22 元，到期日期权收益为 22-21=1 元；若股票价格下跌至 18 元，则到期日期权的收益为 0，如图 12.3 所示。

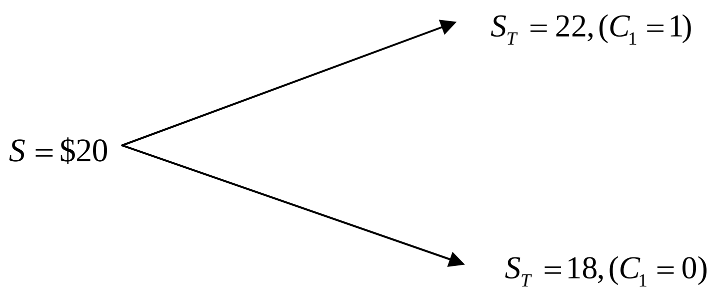


图 12.4　**股票价格和期权价格**

现构建一个投资组合：购买Δ股股票，同时做空 1 份欧式看涨期权。如果$S_T=\$22$，则组合的价值$V$为$22\Delta-1$；如果$S_T=\$18$，则组合的价值为$18\Delta$。选择一个$\Delta$，使得投资组合是无风险的，这意味着组合在股票上涨与下跌时价值一致，因此，

$$22\Delta-1=18\Delta$$

即

$$\Delta=0.25$$

此时，到期日组合的价值$V=22\times0.25-1=18\times0.25=4.5$元。已知当前的股票价格为 20 元，假定 0 时点期权的价格为C_0，则组合在 0 时点的价值为：$20\times0.25-C_0$。由于组合为无风险资产，所以其收益率一定等于无风险资产利率，因此，

$$20\times0.25-C_0=5-C_0=4.5e^{-0.12\times0.25}$$

我们可以得到 0 时点期权价值$C_0=0.633$元。

以上例子，我们通过股票与期权构建无风险资产组合的方法求得了期权的价值。下面，我们将该方法一般化。

考虑一个到期时间为T的期权。假定 0 时点期权的价格为C_0，股票价格为S_0。假定在期权到期时间股票的变化只有两种状态，或者上行至$S_0u\ (u>1)$，或者下行至$S_0d\ \ (d<1)$，上行及下行时期权的收益分别为C_u、C_d，如图 12.5 所示。

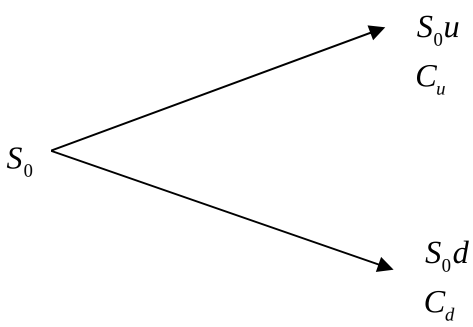


图 12.5 一般化下的股票价格和期权价格

考虑一个由Δ股的股票多头和 1 份期权空头构成的组合。如果股票价格上涨，该组合在到期日的价值为$\Delta S_0 u - C_u$；反之，股票价格下跌时该组合的价值为$\Delta S_0 d - C_d$。选择Δ，使得组合为无风险资产，则有，

$$\Delta S_0 u - C_u = \Delta S_0 d - C_d$$

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0 u - S_0 d}$$

假设无风险资产利率为r，该组合的收率应该等于无风险资产利率，因此，

$$(\Delta S_0 u - C_u)e^{-rT} = \Delta S_0 - C_0$$

$$C_0 = \Delta S_0 - (\Delta S_0 u - C_u)e^{-rT}$$

将Δ代入上式，可得，

$$C_0 = \frac{C_u - C_d}{u-d} - (\frac{C_u - C_d}{u-d}u - C_u)e^{-rT}$$
$$= (\frac{e^{rT}-d}{u-d} f_u + \frac{u-e^{rT}}{u-d} f_d)e^{-rT}$$

取$p = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$，则有$1-p = \frac{u-e^{rT}}{u-d}$，因此，期权的价格$C_0$可简化为:

$$C_0 = e^{-rT}[pC_u + (1-p)C_d]$$

我们可以把p理解为股票价格上涨的概率，而把$1-p$当作下跌的概率。上式给了我们一个很好的求期权价格的方法。我们只需要运用“自制概率”来计算期权在到期日的期望收益,然后用无风险资产利率进行贴现即可。尽管我们并没有假设投资者是风险中性的,但是,为什么我们可以用无风险资产利率来贴现风险资产期权的期望收益呢？问题的关键在于,我们用了“自制概率” p来计算其期望收益。需要注意的是，该概率p，并不是我们实际能够观察到的标的股票上涨的概率，而是一个“虚构的概率”，在这个虚构的概率空间里，风险资产将会变为无风险资产。就好像，我们站在地面上能看到电梯的运动，但是，当站在电梯里的时候，我们感觉不到电梯的运动一样。

为了进一步说明，我们运用刚才得到的概率 p 来计算股票的期望收益，看看股票是否也会变为无风险资产。

$$
\begin{aligned}
E[S_T] &= pS_0u+(1-p)S_0d \\
&= \frac{e^{rT}-d}{u-d}S_0u+\frac{u-e^{rT}}{u-d}S_0d \\
&= S_0[\frac{e^{rT}(u-d)}{u-d}] \\
&= S_0e^{rT}
\end{aligned}
$$

上式表明，当我们采用概率 p 来计算股票价格的期望值时，其期望收益率等于无风险利率。我们可以把这一结论推广到其它风险资产。也就是说，在该概率空间里，所有的风险资产都会变为无风险资产。因此，我们将概率 p 称为**风险中性概率**（**risk neutral probability**）。需要注意的是，我们虽然是在风险中性概率空间里得到的期权价格，该价格也是我们实际能够观测到的概率空间里的价格。在两个概率空间里，他们的概率虽然不同，但是，其“实现值”是一致的。

下面我们用风险中性概率来计算这一节最初的例子中的期权价格。在上述例子中，$r=0.12$、$T=0.25$、$u=1.1$、$d=0.9$，因此，风险中性概率为，

$$p=\frac{e^{rT}-d}{u-d}=\frac{e^{0.12\times 0.25}-0.9}{1.1-0.9}=0.6523$$

时点 0 的期权价格为：

$$C_0=[0.6523\times 1+(1-0.6523)\times 0]e^{-0.12\times 0.25}=0.633\text{元}$$

与前面得到的答案一致。

2.多期二叉树期权定价模型

我们可以将以上分析推广是多期模型。以下以两期模型为例，两期以上的方法类似。

假设初始股票价格为 S，在每一期二叉树中，股票价格或上升到初始值的 u 倍，或下降到初始值的 d 倍。期权价值的符号表示在中（例如，在两次上升运动之后，期权价值为 C_{uu}）。假设每一期二叉树的时间长度是 Δt 年。则有：

$$
\begin{aligned}
C_u &= e^{-r\Delta t}[pC_{uu}+(1-p)C_{ud}] \\
C_d &= e^{-r\Delta t}[pC_{ud}+(1-p)C_{dd}] \\
C &= e^{-r\Delta t}[pC_u+(1-p)C_d]
\end{aligned}
$$

用前两式替换 C_u、C_d，可得：

$$C=e^{-2r\Delta t}[p^2C_{uu}+2p(1-p)C_{ud}+(1-p)^2C_{dd}]$$

在一个风险中性的世界，期权的价格总是等于其期望收益以无风险利率贴现的现值。

在美式期权中，两步二叉树最后节点上的价值与欧式期权相同。在更早的节点上，期权

的价值是以下两个中的较大者：（1）公式 $f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d]$ 算出的期权价值；（2）提前行权的收益。

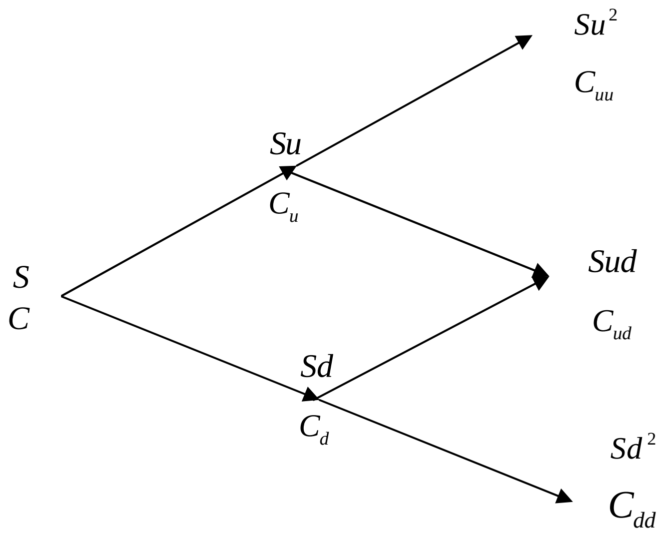


图 12.6 两期二叉树图中的股票和期权价格。

例：欧式看跌期权

假定，股票的当前价格为\$50，期权的执行价格为\$52，价格为两步二叉树，每个步长为 1 年，在每个单步二叉树中股票价格或者上涨 20%，或者下跌 20%，无风险利率为 5%。二叉树如图 12.7 所示。

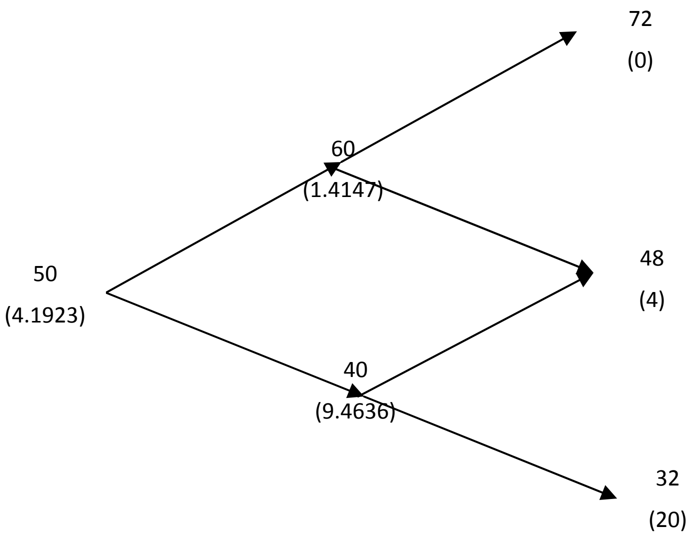


图 12.7 利用两步二叉树图法为欧式看跌期权估值

在每个节点，上面的数字是股票价格，下面括号里的数字是期权价格。

在这种情况下，$u = 1.2, d = 0.8, \Delta t = 1, r = 0.05$，则风险中性概率 p 的值为：

$$p = \frac{e^{0.05\times1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282$$

最后股票的可能价格为$72、$48、$32。在这种情况下，$C_{uu} = 0$、$C_{ud} = 4$、$C_{dd} = 20$，

因此，期权的价值C为，

$$C = e^{-2\times0.05\times1}(0.6282^2 \times 0 + 2\times0.6282\times0.3718\times4 + 0.3718^2\times20) = 4.1923元$$

例：美式看跌期权

如果考察的是一个美式期权，结果可能有所不同。沿用上面关于股票价格等的假定，只是把欧式期权改为美式期权，其二叉树如图 12.8 所示。

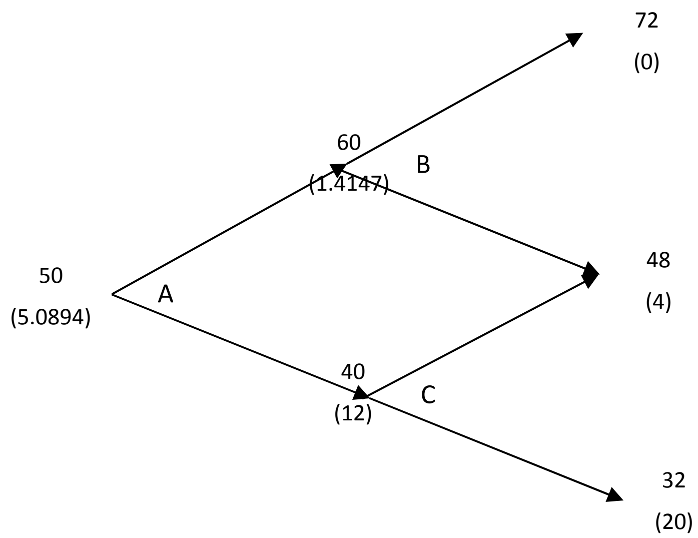


图 12.8 利用两步二叉树图法为美式看跌期权估值
在每个节点，上面的数字是股票价格，下面括号中的数字是期权价格。

在这种情况下，$C_{uu} = 0$、$C_{ud} = 4$、$C_{dd} = 20$，因此，在节点 B 的期权价值C_u为：

$$C_u = e^{-0.05\times1}(0.6282\times0 + 0.3718\times4) = 1.4147 > 0$$

在节点 C 由公式

$$C = e^{-rT}[pC_u + (1-p)C_d]$$

计算得到的期权价格为：

$$e^{-0.05\times1}(0.6282\times4 + 0.3718\times20) = 9.4636 < (52-40) = 12元$$

故节点 C 处的期权价值为$12，那么，最初的期权价值$C$为：

$$C = e^{-0.05\times1}(0.6282\times1.4147 + 0.3718\times12) = 5.0894元$$

可以看出，具有相同行权价格、到期日的美式期权价值要高于欧式期权价值。

3. 根据波动率计算u和d

运用二叉树模型进行定价的过程中，确定股票上涨倍数u及下跌倍数d是关键。通常，我们无法直接观察到u及d，但是我们却能观察到标的资产的波动率，因此，我们可以通过波动率来间接地确定u及d。

我们假定股票的预期收益（现实世界中）为μ，波动率为σ。股票价格遵从于以下二叉树模型，即，时点 0 的股票价格为S_0，经过时间间隔Δt之后，上涨u倍的概率为q，下跌d倍的概率为$1-q$。如图 12.8（a）所示。

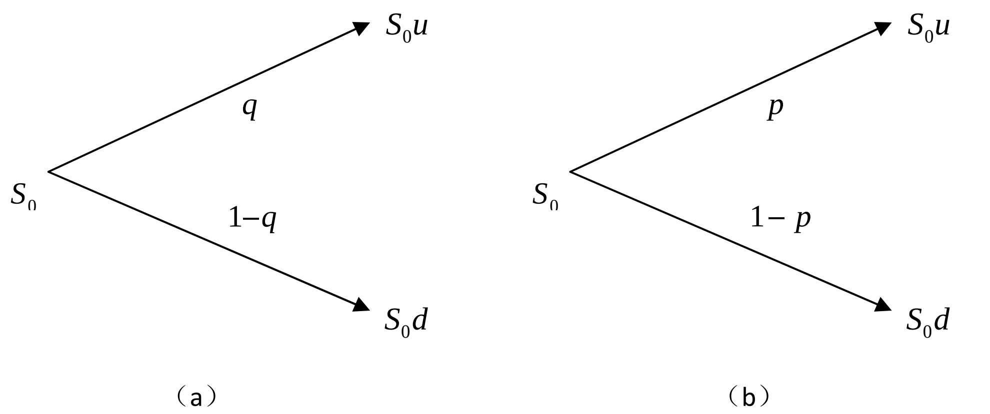


图 12.9（a）现实世界中以及（b）风险中性世界中，Δt 时间段后股票价格的变化

二叉树的期望收益率应该等于μ，因此，

$$qS_0u+(1-q)S_0d=S_0e^{\mu\Delta t}$$

$$q=\frac{e^{\mu\Delta t}-d}{u-d}$$

已知股票收益的方差为$\sigma^2\Delta t$。我们的思路是，如何选择参数u及d，使得二叉树的股票价格的方差等于观察到的方差$\sigma^2\Delta t$，从而确定u与d。因此，我们有，

$$qu^2+(1-q)d^2-[qu+(1-q)d]^2=\sigma^2\Delta t$$

代入q，则有：

$$e^{\mu\Delta t}(u+d)-ud-e^{2\mu\Delta t}=\sigma^2\Delta t$$

将上式进行泰勒展开，忽略Δt^2以上的高阶，并假设$u=1/d$，可以得到，

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

该方法是由 Cox、Ross 和 Robinstein(1979) 提出的。

接下来，我们来检验一下在风险中性的世界里，股票的波动率有何变化。股票的波动如图 12.8(b)所示。风险中性概率为，

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

在这个风险中性世界里，我们可以计算出股票的期望收益率为无风险资产利率 r，而股票的方差等于：

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t}$$

忽略 Δt^2 以上的高阶项，有：

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$
$$d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$
$$e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t$$
$$e^{2r\Delta t} = 1 + 2r\Delta t$$

代入上述方差的计算公式，可以得到，股票价格收益的方差等于 $\sigma^2\Delta t$ 。

以上分析说明，当我们从现实世界切换到风险中性世界的时候，股票的预期收益有变化，从增长率 μ 降到了无风险资产利率 r，但是其波动率保持不变(至少在 Δt 趋近于零的时候)。

4. 布莱克-斯科尔斯-默顿模型

二叉树期权定价模型是一个离散时间模型。它假定标的资产价格在下一期的状态只有两个，要么上涨 u 倍，要么下跌 d 倍。在多期二叉树模型中，只要我们把模型的期数取得足够多（如：30 期），也就是说每一期的时间间隔 Δt 足够小，那么，其定价的精度可以足够满足实践的需求。当时间间隔 $\Delta t \to 0$ 时，理论上可以证明，它的极限状态就是著名的连续时间期权定价模型：**布莱克-斯科尔斯-默顿模型**（Black-Scholes-Merton Model）。这里我们不做严密的模型推导，只对该模型做一个简要的介绍。

假设 S 表示股票的现在的价格，T 表示期权距离到期的时间，X 表示期权的行权价格，σ 表示股票收益率的波动率。布莱克-斯科尔斯-默顿模型假设股票价格遵从于以下所示的几何布朗运动。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t$$

上式中，μ 表示股票收益率的期望增长率。z_t 表示布朗运动。运用伊藤引理，我们可以将上式改写为，

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{T}\epsilon$$

$$\epsilon \sim N(0,1)$$

可以看出，股票的对数收益率遵从于**对数正态分布**，

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\sim N\left(\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t,\sigma^2 T\right)$$

图 12.10 对标准正态分布与对数正态分布的密度函数进行了对比。与正态分布相比，对数正态分布的偏度较大（大于 3），整个分布向右倾斜。

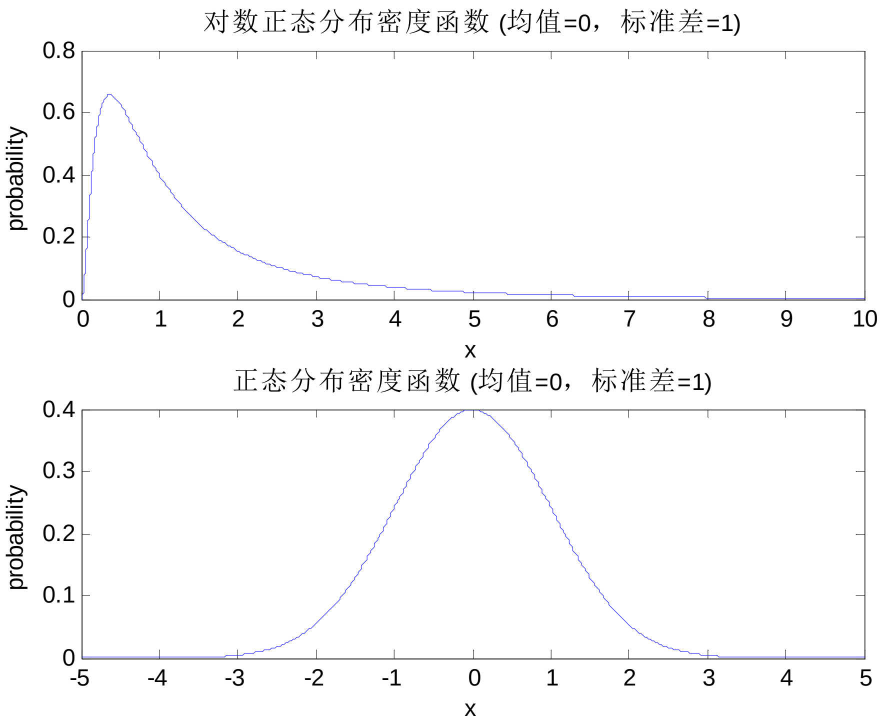


图 12.10 对数正态分布与正态分布的对比

上式可以给我们一个关于股票价格走势的直观感觉。当股票价格遵从于几何布朗运动时，其期望收益率与时间成正比，也就是说，总的来说股价有一个向上的趋势，但是，同时围绕该趋势又有较大的扰动。图 12. 11 表示了 $\mu=20\%$， $\sigma=40\%$、股价的初始值 $S_0=20$ 元时，遵从于几何布朗运动的股票价格的 10 个样本路径。

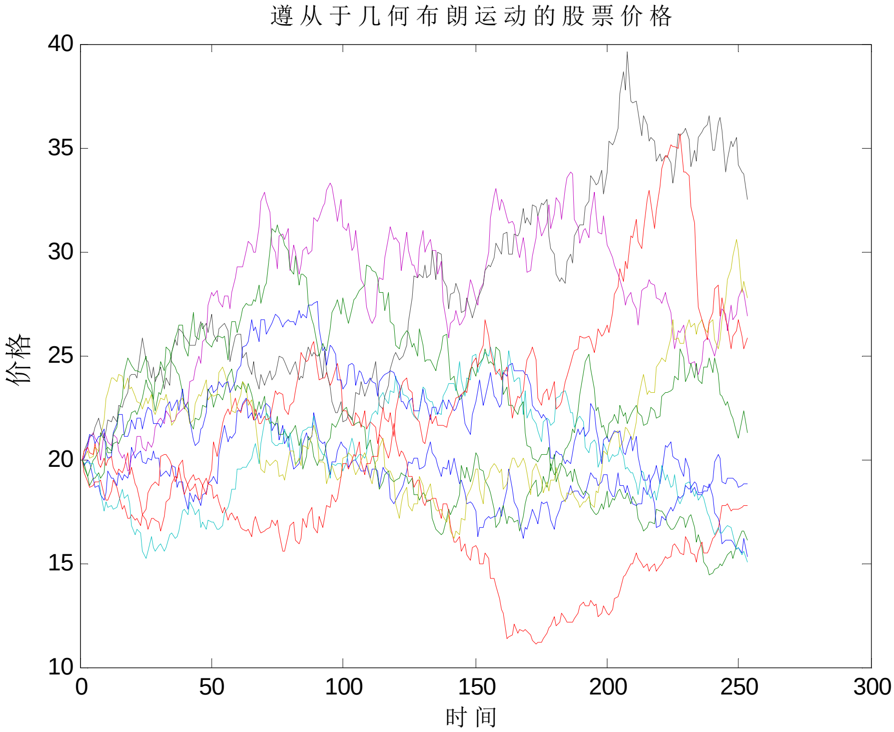


图 12.11 遵从于几何布朗运动的股票价格

当股票价格遵从于几何布朗运动时，布莱克-斯科尔斯-默顿给出了**欧式期权**的定价模型。假设时点 0 的欧式看涨期权价格为 C，欧式看跌期权的价格为 p，则有布莱克-斯科尔斯-默顿模型（**BSM 模型**），

$$C = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$P = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

上述模型为股票不付股利时的期权计算公式。如果股票支付股利，上述模型需要作相应的修正。假设股票支付的连续时间股利为 q，以下两种情况下，到期的股票价格理论上均相同。

1) 初始股票价格为 S_0，股利支付率为 q。

2) 初始股价为 $S_0 e^{-qT}$，不支付股利。

因此，我们只要将不支付股利的 BSM 模型中 S_0 替换为 $S_0 e^{-qT}$ 即可得到股利支付率为 q

的期权定价模型。

$$C = S_0 e^{-qT} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$P = X e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - q + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / X) + (r - q - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

上述模型中，$N(\bullet)$表示标准正态分布的分布函数。

需要注意的是，**布莱克-斯科尔斯-默顿模型只适用于欧式期权**，而对于实物期权来说，美式期权占了绝大多数，因此，布莱克-斯科尔斯-默顿模型并不适合用来对这些期权进行估值。再者，**布莱克-斯科尔斯-默顿模型的一个重要前提是，标的资产能在市场上交易，市场是完备市场（Complete Market）**。但是，实物期权的标的资产往往是现金流、企业价值等，这些标的资产并没有市场进行交易，这也是布莱克-斯科尔斯-默顿模型不能用于大多数实物期权估值的原因之一。

三、实物期权基本概念

1. 什么是实物期权

实物期权指在将来一定的期间内，以一定的成本(行权价格)进行某种行动(如：延期、扩大、缩小或中止某项目等等)的权利。随着时间的推移，投资决策者掌握的信息量会越来越多，他们很可能改变自己的投资决策。例如：当他们发现市场前景比预先估计的好时，可以追加投资，相反，如果市场不如预先估计的乐观，甚至完全相反时，可以缩小投资规模甚至中止投资。随着时间的推移，投资者可以根据需要随时改变投资决策的这些权利可以看作是一种期权，从而可以借助期权定价的框架帮助我们进行投资决策。

为什么我们可以借助期权定价的框架来帮助我们进行投资决策呢？我们可以对照金融期权的概念来理解。假如投资者现在面临一个项目，在今后的 3 年之内任何时候均可支付 100 万元对该项目进行投资。换个角度来说，这相当于投资者手上持有一个权利，在今后 3 年内的任何时点可以用 100 万元买到该项目带来的后续现金流。如果我们**将该项目的后续现金流的现值看成是标的资产，投资成本 100 万元看成是行权价格，3 年看成是到期时间，那么，投资者就相当于持有了一个美式看涨期权。**投资者可以在今后 3 年内选择最佳行权（投资）时机。如果选择行权（投资），那么投资者将得到 NPV，而失掉期权价值；如果不行权，投资者手中还拥有期权价值。因此，投资者将**比较立即投资得到的 NPV 与期权价值的大小，**来决定是否立即投资。

第二节　实物期权分析法在投资决策上的不同之处

一、　决策过程的比较

传统的投资决策法假定投资决策是静态的，一旦决策就无法改变。实物期权分析法假定

决策者面临多种选择。随着时间的推移，信息量的增加，决策者可以改变自己的决策。在未来复杂多变、不确定的经营环境中，实物期权分析法充分考虑了决策者决策的弹性及灵活性。采用传统的投资决策法，投资的起点与终点之间只有一条路径连接。对于实物期权分析法，投资的起点与终点之间有多条路径可以选择，随着时间的推移，决策者更新路径，进行动态决策。

我们从下面矿山开采权的例子中可以看出贴现现金流分析法与实物期权分析法的不同。

租用国有煤矿开采权的决策　假设某公司的管理层正面临是否租用国有煤矿开采权的决策。通过对煤炭价格、埋藏量、煤炭价格的波动等情况的调查，确定了每年产生的现金流，计算出该项目的 NPV＝8100 万元。管理层是否采用该项目呢？

在这个项目的预算中，至少有两个不确定因素会对该项目的 NPV 产生巨大的影响。第一，担心中标价格有可能还有所上升。目前的 NPV 是根据预估的中标价格测算的，如果该中标价格上升，其 NPV 将会显著下降。第二，目前每吨煤的收益仅比成本高出 1 元。如果将来煤价变化 1 元，收益可能翻倍，也可能为零。

面临该不确定性，公司的决策层也考虑到了采用不同的时机进行开采。由于开采权有效期为 5 年，因此，决策层将煤矿开采时间分为现在、1 年后、2 年后、3 年后、4 年后 5 种情况，分别计算出项目的 NPV。但是，其结果并没有明显差别。其原因是什么呢？因为，尽管考虑了现在、1 年后、2 年后、3 年后、4 年后 5 个时点进行开采，但是，这 5 种情况进行决策的时点都一样，都是现在。因此，对于决策者来说，他们所掌握的信息都一样，预测的将来现金流也大同小异，得到的净现值也就基本一致了。最后，决策层意识到该项目具有延期期权。也就是说，决策层不需要现在立即做出决策，开采还不开采，而是等待市场走势逐渐明朗之后，如果煤炭价格上涨至足够高，并在其下跌之前有可能收回成本时进行开采，反之，就继续选择等待。考虑到该期权的价值之后，该项目的价值变为 1 亿 5950 万元。结果，该公司以 9900 万元中标，之后煤炭价格上涨，为公司带来巨大盈利。

在本例中，贴现现金流分析法与实物期权分析法的区别在于，NPV 法将 5 种不同开采时间的项目作为 5 个相互排斥的项目进行决策，而实物期权分析法却将其看作为一个项目，在每个时点判断其是否应该延期。贴现现金流分析法对于每一个项目的决策，仅仅考虑投资或不投资两种决策，并没有考虑到随着时间的推移决策者拥有的信息逐渐增加时，其决策有可能会改变的可能性。

二、决策结果的比较

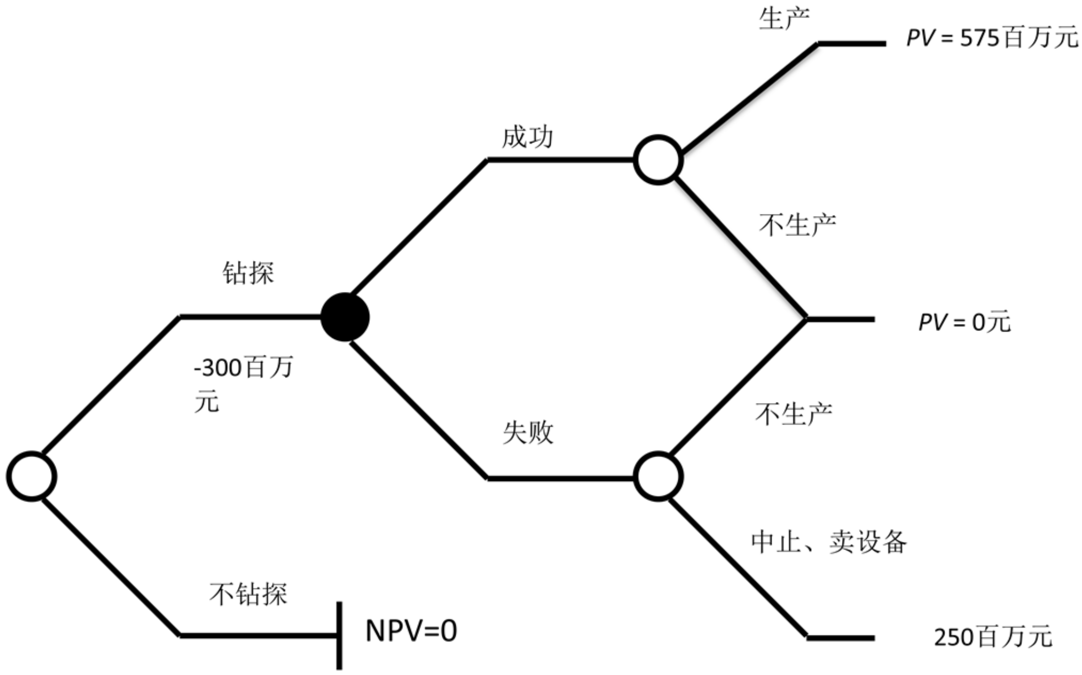
下面我们通过案例分析，比较贴现现金流分析法与实物期权分析法在决策的结果上两种不同的情况。

（一）　净现值为负也并不意味着可以完全放弃项目

放弃期权案例

某公司计划钻探石油。钻探设备的成本为 300 百万元，一年以后钻探有可能成功，也有可能失败。假定成功与失败的可能各占 50%。如果成功，后续现金流的现值为 575 百万元，但是，如果失败，项目的净现值为 0。假设贴现率为 10％。

首先，我们运用净现值分析法进行分析。决策树如下图所示。



如果钻探成功，选择继续生产，1 年之后获得后续现金流的现值为 575 百万元；如果钻探失败，选择中止，后续现金流的现值为 0 元。因此，一年之后的期望现金流为，

$$\begin{matrix}\text{Expacted}\\\text{Payoff}\end{matrix}=0.5\times575+0.5\times0=287.5\text{百万元}$$

$$NPV=-300+\frac{287.5}{(1+0.1)}=-38.64\text{百万元}$$

以上分析说明，采用净现值分析法，由于项目的净现值为负，因此，应该放弃该项目。但是，上面的分析没有考虑到钻探失败之后公司可以中止该项目，并将设备卖掉的选择。假设钻探失败后将设备卖掉可以回收 250 百万元，显然在钻塔失败的情况下，公司将选择中止项目、卖掉设备。在这种情况下，一年之后的期望现金流变为，

$$\begin{matrix}\text{Expected}\\\text{payoff}\end{matrix}=\left(0.5\times575\right)+\left(0.5\times250\right)=412.50\text{百万元}$$

$$NPV=-300+\frac{412.50}{1+0.10}=75.00\text{百万元}$$

可见，在被项目中实际上包含有中止期权，如果考虑到该期权的价值时，项目的总价值变为 75 百万元，说明该项目还具有开采的价值，不应该全部放弃。我们可以把项目的市场价值看作是，不考虑期权时项目的 NPV 与项目中隐含的期权价值之和。因此，我们可以得到中止期权的价值。

$$75.00=-38.64+\text{Option\_value}$$
$$\text{Option\_value}=113.64\text{百万元}$$

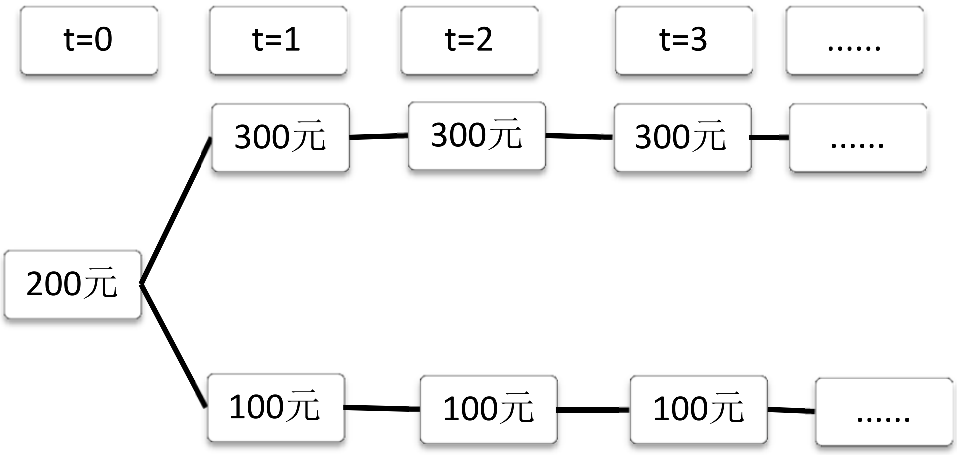
该案例说明，及时项目的净现值为负，也不意味着我们可以完全放弃该项目。原本隐含

在项目里的一些期权，如果我们在做投资决策时忽略这些期权的价值，将会过低估计该项目的价值。

（二） 净现值为正也并不意味着立即投资是最佳的决策

延期期权案例

假设某企业正考虑投资生产某设备的项目，该投资是不可逆的。假设该企业投资 I=1600 万元，每年可以生产设备 1 万台。现在该设备价格为 200 元/台，第二年其价格有 50%的可能性上涨至 300 元/台，有 50％的可能性下跌至 100 元/台，如下图所示。为简化分析，假设设备价格波动的风险均为可分散的风险，因此我们可以采用无风险利率(10％)对其现金流进行贴现。



如果现在立即投资，从第一年开始，每台设备的平均价格为 200 元，每年生产 1 万台设备，总金额为 200 万元。运用永续年金的计算公式，其净现值为,

$$NPV = -1600 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{200}{(1.1)^t} = -1600 + 2200 = 600\text{万元}$$

项目的净现值远远大于 0，根据净现值理论，该企业应该立即投资项目。但是，如果我们仔细分析，事情似乎并不能如此肯定。因为在第一年末，设备的价格存在一个不确定性。如果上涨至 300 元/台，该项目的 NPV 将会更大，但是，如果设备的价格下跌至 100 元/台，该项目的 NPV 将小于零。因此，如果立即投资该项目，将有 50%的可能性获得正的 NPV，有 50%的可能性获得负的 NPV。

以上分析均是在现在立即投资的前提下进行的。企业在这个案例中，企业并非现在必须决策是否立即投资。企业拥有选择最佳投资时机的权利。也就是说，企业拥有延期期权。如果企业改变投资策略，现在并不急于做出投资决策，而是等待至第一年结束时再来做决策。那时价格的不确定性将会消失，如果价格上涨至 300 元/台，就投资该项目，反之，如果价格下跌至 100 元/台，就放弃投资。我们来重新计算一下采用该投资决策时项目的现在价值。

$$NPV = \frac{\left[0.5 \times \left(-1600 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{300}{(1.1)^t}\right) + 0.5 \times 0\right]}{1.1} = \frac{850}{1.1} = 773\text{万元}$$

与现在立即进行投资相比，净现值增加了$773-600=173$万元。表明企业延期进行投资决策是有利的。净现值增加的部分可以理解为该延期期权的价值。该期权价值也可以理解为，企业为了获得推迟投资决策的权利所愿意支付的价值。

该案例告诉我们，当投资者可以选择其投资时机时，即使现在立即投资获得的净现值为正，也不意味着立即投资是最佳的，采取等待的策略也许能够获得更高的收益。这相当于美式期权的持有者选择最佳投资时机。即使立即行权能够获得正的收益，但是并不意味着立即行权是最佳的，需要比较立即行权获得的收益与继续持有期权的价值两者之间的大小来决定。

第三节　**利用期权定价模型进行投资决策**

在这一节中，我们将通过案例来学习如何利用二叉树期权定价模型来计算项目中隐含的中止期权以及扩张期权的价值。

一、中止期权

假设某制药公司计划开发新药。由于开发进度、市场需求、动物实验以及获得食品医药监督局的批准等方面均存在着非常大的不确定性，因此决策层考虑了中止期权。开发期间为 5 年。如果中止该项目，公司可以将专利等知识产权卖给其它签约的制药公司，得到 1 亿元的收益。

在进行实物期权分析之前，需要先进行净现值分析。根据净现值分析法，计算出项目最有可能发生的场景（基本场景）的净现值为 1 亿 5 千万元。通过蒙特卡罗模拟得到的该项目将来现金流的现值的对数增长率的波动率为 30%。假设无风险资产利率为 5%。该项目中隐含的中止期权的价值是多少？含有该中止期权的项目的真正价值有多大？

为了计算该中止期权的价值，我们首先要确定该期权的各个参数。我们将项目的将来现金流的现值作为该中止期权的标的资产，项目的基本场景的净现值 1 亿五千万作为该标的资产的初始价格。期权的到期时间为 5 年。行权价格为卖掉专利所能够回收的收益 1 亿元。标的资产价格的对数收益率为 30%。因此，我们可以得到标的资产价格的二叉树，如下图所示。

接下来，我们从第五年一步一步往前倒推，计算出含有期权的项目价值。对于第五年的到期节点来说，项目价值=MAX｛标的资产的价值，行权价格(1 亿元)｝。例如：对于节点 A 来说，其价值等于 MAX{6.725 亿元，1 亿元}=6.725 亿元。对于中间节点来说，项目价值=MAX{不行权时期权的价值，行权价格}。而不行权时期权的价值可以根据风险中性定价方法来计算。

$$F_t=[P\times F_{t+1}^U+(1\text{-P})\times F_{t+1}^D]\times e^{-r\times T}$$

式中，F_t 为 t 期的期权价值，F_{t+1}^U 为 t+1 期价格上涨时的期权价值，F_{t+1}^D 为 t+1 期价格下跌时的期权价值。例如：对于节点 B 来说，保持不行权时期权的价值为，.

$$F=[368.94\times 0.51+202.48\times(1-0.51)]\times e^{-0.05\times 1}=273.2\text{百万元}$$

因此，节点 B 的项目价值等于 MAX(273.2, 100) = 273.2 百万元。以此类推，我们可以得到 0 时点的含有期权的项目价值为 156.64 百万元。期权价值应该等于 156.64 – 150 = 664 万元。

标的资产初始价格	150.00
到期时间	5.00
无风险资产利率	0.05
波动率	0.30
上涨倍数	1.35
下跌倍数	0.74
风险中性概率	0.51

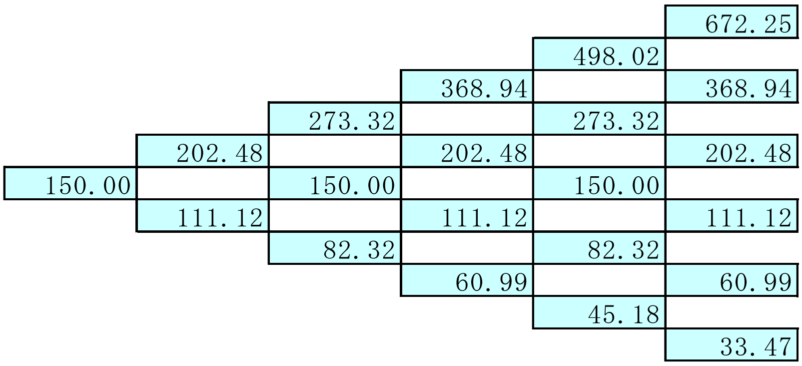


图 标的资产价格二叉树

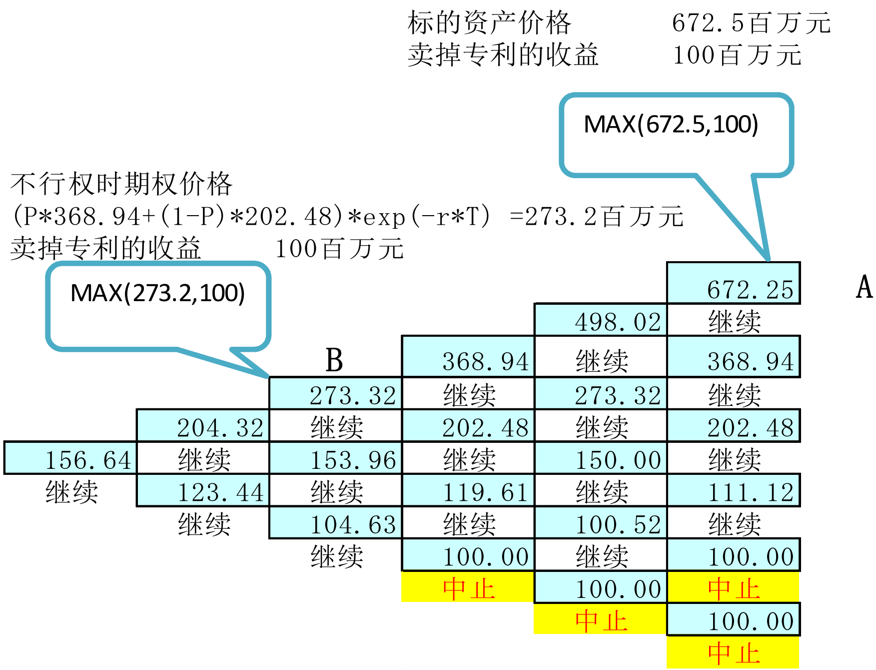


图 隐含中止期权时项目的价值

扩张期权

某企业根据净现值分析法得到项目的 NPV=4 亿元。根据蒙特卡罗模拟得到的将来现金

流的对数增长率的波动率为 35％，无风险利率为 7%。假设该企业今后 5 年可以用 2 亿 5000 万元收购竞争企业，从而将规模扩大两倍。考虑到该期权的价值时，该企业的真正价值是多少？其扩张期权的价值是多少？

在该案例中，项目中隐含的扩张期权的特性为，标的资产价格的初始值为 4 亿元，波动率为 35%，行权价格为 2 亿 5000 万元，期权的到期时间为 5 年的美式看涨期权。

与计算中止期权时一样，首先，我们需要确定标的资产价格的二叉树。如下图所示。

标的资产初始价格	400.00
到期时间	5.00
无风险资产利率	7.00%
波动率	35.00%
上涨倍数	1.42
下跌倍数	0.70
风险中性概率	0.51

					2301.84
				1622.08	
			1143.06		1143.06
		805.50		805.50	
	567.63		567.63		567.63
400.00		400.00		400.00	
	281.88		281.88		281.88
		198.63		198.63	
			139.98		139.98
				98.64	
					69.51

然后，我们运用风险中性定价原理，从第五年开始，逐步向前推算，计算出隐含有期权的企业价值。我们以节点 C 来说明第五年的节点的价值计算方法。节点 C 的价值等于 MAX(企业扩张时的价值，企业不扩张时的价值)。企业扩张时的价值等于，

$$2\times 2301.84-250=4353.68\text{百万元}$$

而企业不扩张时的价值等于 2301.84 百万元，因此，节点 C 的价值等于 MAX(4353.68, 2301.84) = 4353.68 百万元。对于中间节点来说，不同之处在于企业不扩张（不行权）时项目价值的计算上。例如，对于节点 D 来说，企业不扩张时的期权价值等于，

$$[2068.7\times 0.51+917.91\times (1-0.51)]*e^{-0.07\times 1}=1408.4\text{百万元}$$

而企业扩张时的价值等于，

$$2\times 805.5-250=1361\text{百万元}$$

因此，节点 D 的价值等于 MAX(1408.4, 1361) = 1408.4 百万元。按照同样的方法，由后往前逐步计算，可以得到含有扩张期权的项目价值 638.30 百万元。如下图所示。扩展期权的价值等于 638.30- 400= 238.30 百万元。

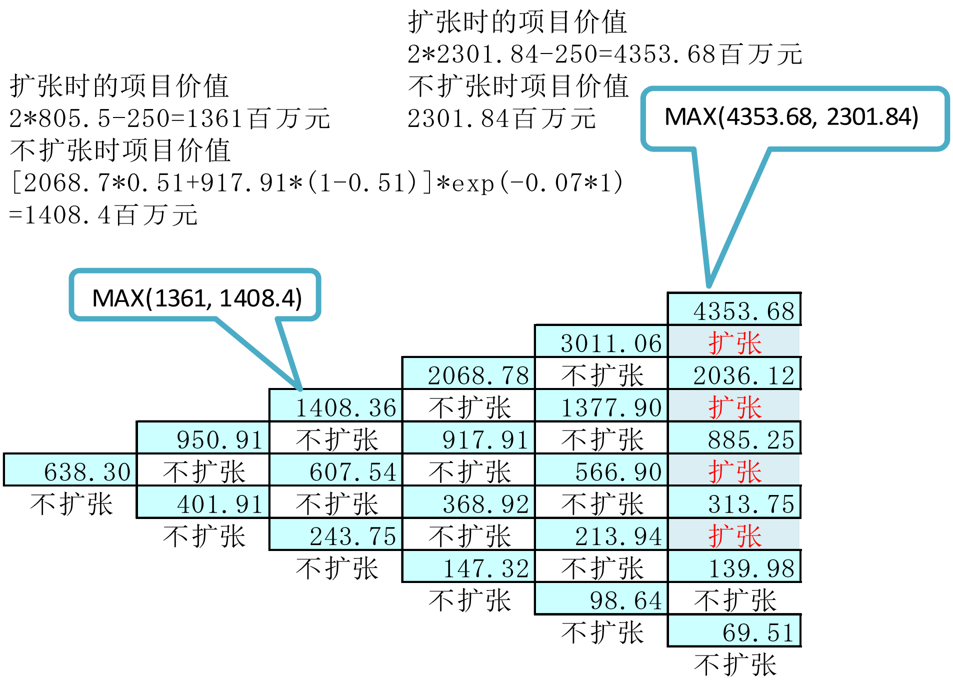


图 含有扩张期权的企业价值

第四节 具体案例分析：实物期权分析法在软件开发中的应用①

一、案例背景介绍

PORTES 公司是一家在美国运作十年的软件公司，它的旗舰产品是一个叫做 Recover 的系统恢复软件，需要根据客户需求定制且价格昂贵。该公司的创始人也是现任 CEO，Diane Mullins,是一名软件专家，曾在法国拿到 MBA 学位。

几年以前，Diane 意识到本公司的产品已到平台期，量身定制式的生产极大的制约了产品的大规模生产和销售，网络销售也无法实现。于是 Diane 研发出一款可以在网上销售的标准化数据恢复软件，但分销商的佣金高昂，而 PORTES 公司又没有自己的网络资源，销售再次遇到瓶颈。

在一个于巴黎工作多年的好友 Olivier 的建议 Diane 在法国开拓网络化市场。一是法国市场的潜在需求很大，PORTES 也不需要为当地分销商提供佣金，且法国的 B2B E-commerce 市场没有美国那样拥挤；另外由于对当地情况缺乏了解和语言障碍，美国竞争者无法满足法国市场的需求；而进口关税和邮递费用进一步阻碍法国消费者购买美国本土产品。Olivier 认为，借助在法开拓市场占据的有利本土优势，PORTES 不仅可以出售现有产品，还可以销售其他产品，同时进一步了解法国软件市场的需求特征。

二、传统净现值分析法

Diane 对其好友的建议有些心动，吩咐她的财务总监 Bill 对这个投资项目做一个投资分析。Bill 和他的团队经过认真研究分析，得到关于此投资项目的一些投资特征：

① 该案例根据 Tom Copeland and Vladimir Antikarov (2003)的第 11 章重新整理而成。

- 在初期有一个对软件的净投入。
- 在文字媒体和网络上有高昂的持续宣传成本，以及网络的运营成本。
- 在项目投资的前 6 年间，产品销量预测由 200 份上升至 400 份，单价由 30000 降至 20000，单位生产成本由 9000 降至 7000。房租成本每年 200000，行政费用为收益的 10%。
- 项目初始投资 35000000，计划 10 年折旧完毕。
- 法国的税率为 40%。

结合同类比较法并考虑市场风险和汇率风险后，公司决定采用 13.88%的预期收益率。因无法确切估计 6 年后项目的收益和成本，他们决定采用简单年金增长模型来估计项目的终值。假设现金流的长期增长率为 4.709%，第六年末项目的终值为，

$$V_6 = \frac{V_6(1+g)}{r_{WACC}-g} = \frac{3920\times(1+0.04709)}{0.1388-0.04709} = 44752.81\text{千元}$$

项目的现金流如图表 12 所示。

项目	第0年	第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年
销售量（单位）		200	230	264	303	348	400	
年复增长率		13.86%						
单价（千美元）		30.00	27.66	25.51	23.52	21.69	20.00	
年复增长率		8.1%						
单位成本		9.0	8.6	8.1	7.7	7.4	7.0	
收入		6,000	6,355	6,731	7,130	7,552	7,999	
销售成本		1,800	1,966	2,148	2,346	2,563	2,800	
毛利润		4,200	4,389	4,584	4,784	4,989	5,199	
毛利率%		70%	69%	68%	67%	66%	65%	
租金		200	200	200	200	200	200	
销售及管理费用		600	636	673	713	755	800	
息税折旧前利润		3,400	3,553	3,710	3,871	4,034	4,200	
折旧		3,500	3,500	3,500	3,500	3,500	3,500	
息税前利润		(100)	53	210	371	534	700	
息税前利润增长率			-153%	294%	76%	44%	31%	
税收		0	21	84	148	214	280	
净利润		(100)	32	126	222	320	420	
折旧		3,500	3,500	3,500	3,500	3,500	3,500	
初始投资	35,000							
自由现金流	(35,000)	3,400	3,532	3,626	3,722	3,820	3,920	
自由现金流增长率			4%	3%	3%	3%	3%	
持续价值								44,748
贴现率	13.88%							
现值	34,688	36,102	37,581	39,171	40,886	42,740	44,753	
净现值	(312)	39,502	41,113	42,797	44,608	46,560	48,673	
自由现金流/净现值		8.6%	8.6%	8.5%	8.3%	8.2%	8.05%	

图表 12 项目现金流分析表

运用 NPV 分析法，Bill 算出该项目的净值为-312000 元。如果按照净现值分析法，该项目不应该投资。因为 PORTES 公司最近 5 年盈利不少，且没有负债，故有意向在法国开展该项目。但 Diane 无法相信 Bill 算得的 NPV 净值为负，请求 Bill 再次计算其净值。于是 Bill 决定运用实物期权理论来再次分析该项目的可行性。

三、实物期权分析法

运用实物期权进行分析分为以下几个步骤：
挖掘项目中隐含的期权。

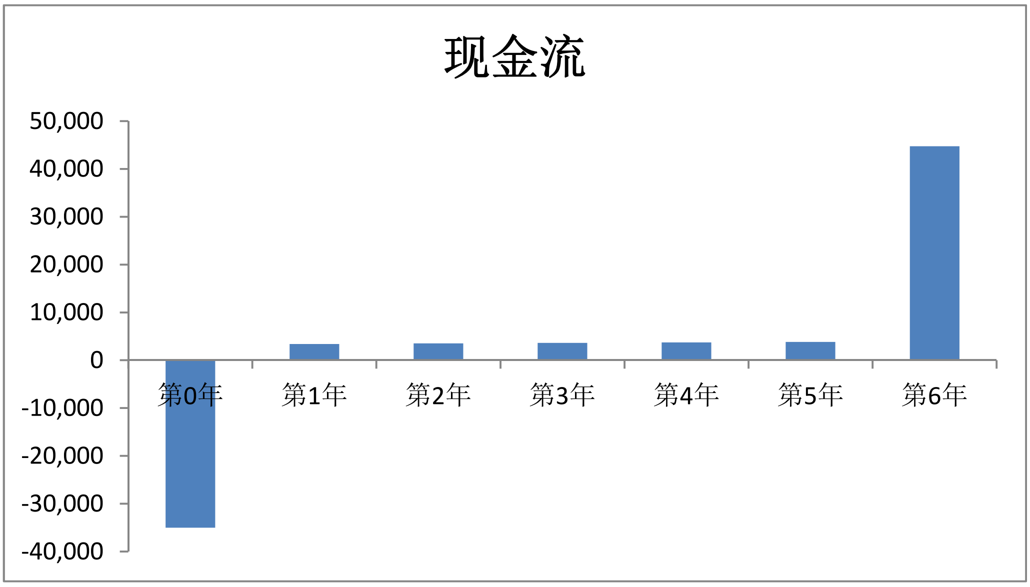
- 对 NPV 的对数增长率进行蒙特卡罗模拟。首先，需要对 NPV 的影响因素（如：销售数量、销售单价等）的分布进行估计。
  - 估计销售价格的均值、波动率。
  - 估计销售数量的均值、波动率。
- 运用二叉树模型估算含有期权的项目价值。

（一）挖掘项目中隐含的期权

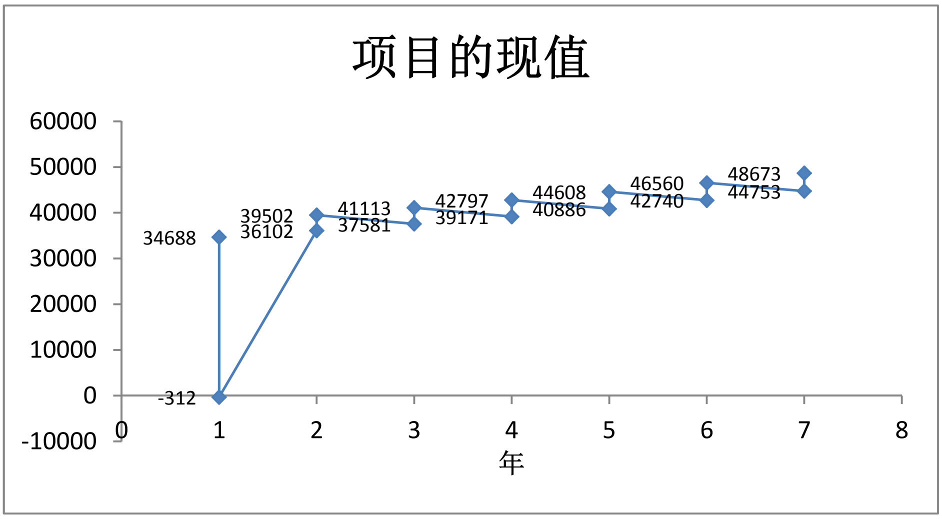
Bill 与 Diane 达成共识，公司未来的的现金流来源除产品 Recover 外，还有一个目前已到研发后期的新产品 PreventLoss，两产品在未来将利用投入的网络资源形成互补产品。Diane 与 Bill 还考虑了该项目的扩大投资与退出的可能性。如果在项目投入的前 5 年内 Recover 的销售额理想，他们就会扩大投资并引进新产品 PreventLoss。在这种状态下，公司需要需追加投资 1050 万，投资结束后即可使得现金流增加 30%。因此，该项目隐含一个扩张期权。然而，若项目进展不顺利，他们可以在未来 6 年内的任意时间以 1500 万的价格卖出投资的硬件设施。也就是说，该项目还隐含一个中止期权。

（二）运用蒙特卡罗模拟估计 NPV 对数增长率的波动率

计算期权价值，首先需要知道 NPV 的对数增长率的波动率。图表 13 表示了项目的现金流的波动情况。同时，图表 14 显示了项目现值随时间的波动状况。



图表 13 现金流波动



图表 14 项目现值的波动

Bill 认为，影响该项目 NPV 的主要因数有两个：销售价格与销售数量。

1、估计价格与销量的波动率

首先估计销售价格的波动率。根据市场调查，未来 6 年后，单价的平均值为 20000 元，基本上不会低于 15000 元。因此，单价的平均增长率为-8.11%。

$$P_6 = P_1 e^{r_P T} = 30e^{-0.0811\times 5} = 20\text{千元}$$

假设价格增长率遵从于几何布朗运动，则其价格的 95%置信区间为,

$$P_6 = \left[30e^{5\times(-0.0811)-2\sigma\sqrt{5}}, 30e^{5\times(-0.0811)+2\sigma\sqrt{5}}\right]$$

因此，我们可以根据第六年末价格的下限 15 千元，根据以下公式反算出价格的波动率。

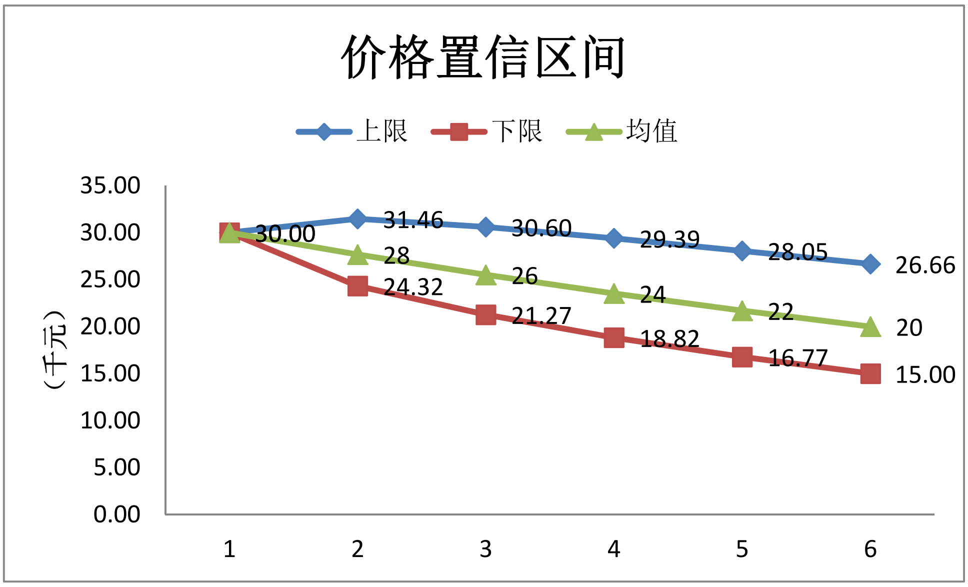
$$\sigma_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i - \ln\left(\frac{Q_T^{lower}}{Q_0}\right)}{2\sqrt{T}} = \frac{5\times(-8.1\%) - \ln\left(\frac{15}{30}\right)}{2\sqrt{5}} = 6.43\%$$

知道了价格的波动率，我们即可估算出每一年价格波动的 95%置信区间的上下限。例如第六年的上下限分别为，

$$P_6^{lower} = 30\times e^{5\times(-0.0811)-2\times 0.0643\times\sqrt{5}} = 15$$

$$P_6^{uper} = 30\times e^{5\times(-0.0811)+2\times 0.0643\times\sqrt{5}} = 26.66$$

各年度价格波动的 95%置信区间如图表 15 所示。由图可见，随着时间的推移，价格的置信区间逐渐增大，估计的精度也随之下降。



图表 15 单价的置信区间

同样，可以计算出销量的波动率及置信区间。根据市场调查，可以得到六年之后的平均销量为 400，因此，其平均增长率为 13.86%。

$$Q_6 = Q_1 e^{r_Q T} = 200 \times e^{0.1386 \times 5} = 400$$

假设销量也遵从于几何布朗运动，则其 95%置信区间为，

$$Q_6 = \left[200e^{5\times(0.1386)-2\sigma\sqrt{5}}, 200e^{5\times(0.1386)+2\sigma\sqrt{5}}\right]$$

根据市场调查可知，第 6 年末销量不太可能低于 190，因此，决策者可以反算出销量的波动率。

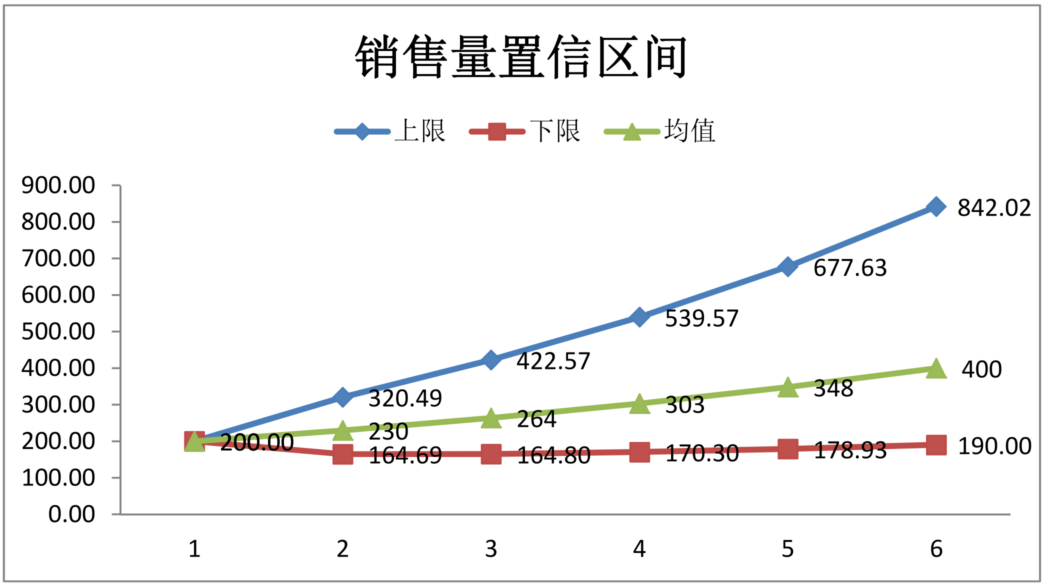
$$\sigma_Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i - \ln\left(\frac{P_T^{lower}}{P_0}\right)}{2\sqrt{T}} = \frac{5\times(13.86\%) - \ln\left(\frac{190}{200}\right)}{2\sqrt{5}} = 16.65\%$$

再根据销量的波动率，可以计算出每一年销量的 95%置信区间。如：第 6 年末的 95%置信区间的上下限分别为，

$$Q_6^{lower} = 200 \times e^{5\times(0.1386)-2\times 0.1665\times\sqrt{5}} = 190$$

$$Q_6^{uper} = 200 \times e^{5\times(0.1386)+2\times 0.1665\times\sqrt{5}} = 842.02$$

得到的各年销量的 95%置信区间如图表 16 所示，同样可以看出销量的置信区间随着时间的推移逐渐增大，估计精度也随之降低。



图表 16 销量置信区间随时间的波动

2、蒙特卡罗模拟

对于销售价格来说，从第一年的价格 30 千元出发，按照以下公式，逐年计算其销售价格。

$$P_t = P_{t-1}e^{r_P+\sigma_P\epsilon}$$

$$\epsilon \sim N(0,1)$$

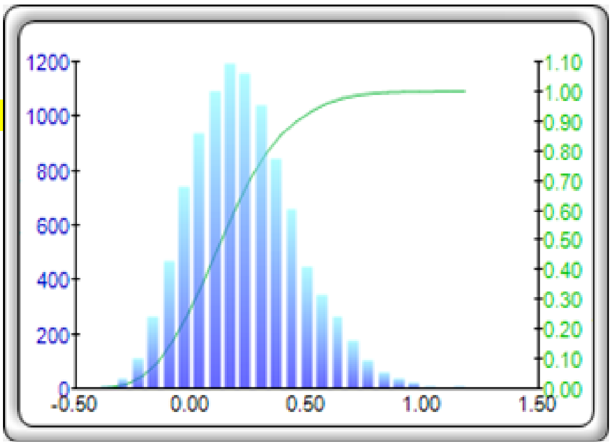
同样，对于销量来说，从第一年的销量 200 出发，按照以下公式，逐年计算其销量。

$$Q_t = Q_{t-1}e^{r_Q+\sigma_Q\epsilon}$$

$$\epsilon \sim N(0,1)$$

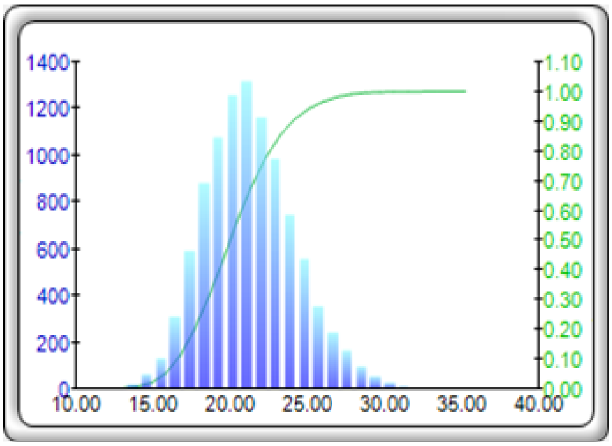
对遵从于正态分布的随机变量ϵ进行 10000 次抽样，即可得到 NPV 对数增长率以及第六年销售价格、销量的分布。可以看出，**NPV 对数增长率的波动率为 22.86%**。

Number of Datapoints	10000
Mean	0.1464
Median	0.1286
Standard Deviation	0.2286
Variance	0.0522
Coefficient of Variation	1.5608
Maximum	1.1819
Minimum	-0.4765
Range	1.6585
Skewness	0.4533
Kurtosis	0.2181
25% Percentile	-0.0166
75% Percentile	0.2867
Error Precision at 95%	0.0306



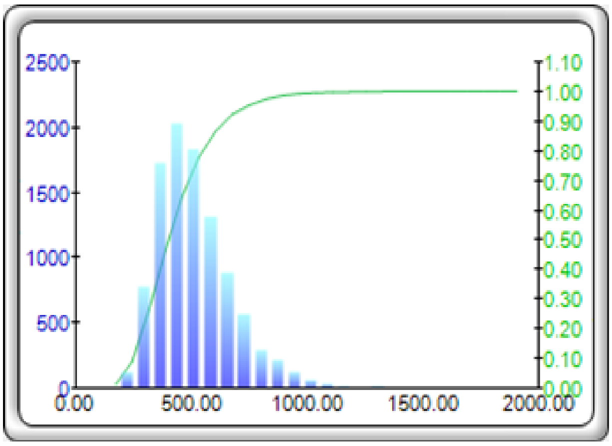
图表 17 NPV 对数增长率的分布（抽样 10000 次）

Number of Datapoints	10000
Mean	20.1965
Median	19.9829
Standard Deviation	2.9226
Variance	8.5414
Coefficient of Variation	0.1447
Maximum	35.2659
Minimum	12.0990
Range	23.1670
Skewness	0.4259
Kurtosis	0.3117
25% Percentile	18.1465
75% Percentile	22.0261
Error Precision at 95%	0.0028



图表 18 第六年销售单价的分布（抽样 10000 次）

Number of Datapoints	10000
Mean	427.5108
Median	400.2337
Standard Deviation	163.9335
Variance	26874.1868
Coefficient of Variation	0.3835
Maximum	1905.4966
Minimum	98.2335
Range	1807.2631
Skewness	1.2143
Kurtosis	3.0240
25% Percentile	311.0575
75% Percentile	512.6825
Error Precision at 95%	0.0075



图表 19 第六年销量的分布（抽样 10000 次）

（三）运用二叉树模型估算含有期权的项目价值

1、 确定标的资产的二叉树

以第 0 年的现值 34688 千元为标的资产的初始价格，波动率为 22.86%，期权到期时间为 6 年，无风险资产利率为 5%。即可计算出上涨的倍数 $u = e^{\sigma} = 1.2568$，下跌的倍数 $d = 1/u = 0.7957$。风险中性概率为，

$$P = \frac{e^{r_f} - d}{u - d} = 55\%$$

由此，可以得到 PV 的二叉树，如所示。

Y0(’000)	Y1(’000)	Y2(’000)	Y3(’000)	Y4(’000)	Y5(’000)	Y6(’000)
						79679.79
						73263.00297
					69066.76	6416.78
					63399.79124	
				59958.57	5666.97	50446.09
				54955.19487		46383.55664
			52124.53	5003.38	43726.87	4062.53
			47707.97121		40139.05639	
		45372.55	4416.56	37960.39	3587.82	31937.93
		41474.56303		34792.69604		29365.9042
	39502.13	3897.99	33000.57	3167.69	27683.93	2572.03
34687.51	36102.13		30204.40461		25412.44721	
	3400.00	28725.83	2796.17	24033.11	2271.48	20220.23
		26257.97013		22027.61178		18591.85435
		2467.86	20893.00	2005.50	17526.98	1628.38
			19122.71754		16088.88029	
			1770.28	15215.61	1438.10	12801.64
				13945.90636		11770.69318
				1269.70	11096.51	1030.94
					10186.0347	
					910.48	8104.85
						7452.146261
						652.70

图 20 NPV 的二叉树

图中每个节点有 3 个数字，其中最上面的是 NPV，中间的是现值，最下面的是现金流。

2、计算含有期权的项目价值

对于 Ports 公司来说，此项目有两个实物期权。

- 一个是终止期权，公司可以随时以 1500 万元的价格卖出硬件投资。
- 另一个是扩张期权，公司可以追加投资 1050 万元，引进新产品 PreventLoss，使得现金流可以增加 30%。

各节点的项目价值为，扩张、中止、保持现状三者中的最大值。如图表 21 所示。由图可知，含有期权的项目的净现值为 1147 千元。比较扩张、中止、保持现状三者的值的大小，可以得到项目的决策树。如图 22 所示。

考虑到项目隐含的实物期权的价值后，项目价值由最初的-312,000 元提高到了 1147,000 元。如图 23 所示。

四、总结

从以上分析我们可以看出，在该项目的估值中，如果忽略了项目中隐含的期权价值，将对该项目的价值过低估计，从而失去可能带来良好收益的投资项目。实物期权分析法往往会为公司高层管理者的“直觉”找到科学依据。

Y0(’000)	Y1(’000)	Y2(’000)	Y3(’000)	Y4(’000)	Y5(’000)	Y6(’000)
						91158.69
						6416.78
					77586.70	84741.90386
					5666.97	
				65945.13	71919.72861	53861.16
				5003.38		4062.53
			55936.92	60941.75333	45527.53	49798.62363
			4416.56		3587.82	
		47699.27	51520.36257	38909.81	41939.71125	31937.93
		3897.99		3167.69		2572.03
	41164.27	43801.28198	33747.26	35742.12337	27683.93	29365.9042
36147.05852	3400.00		2796.17		2271.48	
35000	37764.27024	29752.65	30951.09423	24613.56	25412.44721	20220.23
1147		2467.86		2005.50		1628.38
		27284.7909	22386.33	22608.05856	18896.08	18591.85435
			1770.28		1438.10	
			20616.04935	18016.05	17457.98246	16030.94
				1269.70		1030.94
				16746.35067	15999.22	15000
					910.48	
					15088.74453	15652.70
						652.70
						15000

图表 21 含有期权的项目价值

Y1(’000)	Y2(’000)	Y3(’000)	Y4(’000)	Y5(’000)	Y6(’000)
					Expand
				Expand	
			Expand		Expand
		Expand		Expand	
	Expand		Expand		Expand
Expand		Expand		Go	
	GO		Go		Abandon
		Go		Abandon	
			Abandon		Abandon
				Abandon	
					Abandon

图 22 项目的决策树

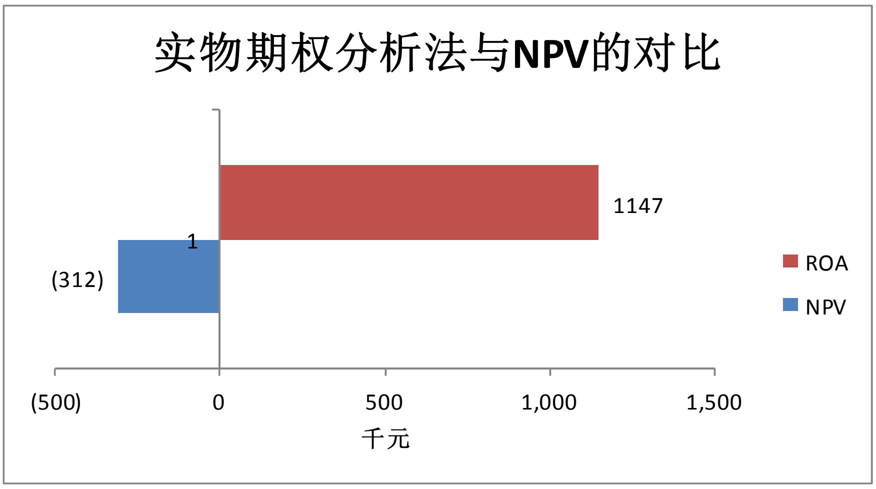


图 23 实物期权分析法与净现值分析法的分析结果比较

注：图中 ROA 代表实物期权分析（real option analysis）的结果，NPV 代表净现值分析的结果。

小结

期权不仅存在于金融衍生产品中，在企业的投资决策中也有广泛的应用。实物期权分析法就是期权定价的分析框架在投资决策中应用的体现。净现值分析法往往不能考虑投资决策的弹性及柔软性，是一种静态的投资决策方法。而实物期权分析法对于投资决策过程中决策的灵活性运用期权的方法进行分析，是一种动态投资决策的方法。实物期权不是在金融市场上进行交易的期权，它隐含在各项目的投资决策中，决策者要善于发现隐含在项目中的各种期权，正确评估其价值，否则，将会导致对项目价值的过低估计。

问题与应用

1. 净现值分析法能够处理项目中存在的不确定性吗？如何处理？与实物期权分析法相比存在什么不同？
2. 为何实物期权分析法被看作是降低风险、提升价值的一种投资决策方法。
3. 假如 3.1 节的中止期权的案例中，卖出专利的回收的资金从第 1 年开始上涨了 10%，重新计算其项目的价值及期权价值。
4. 在 3.2 节中的扩张期权的案例分析中，一个重要的前提是竞争对手企业的增长速度、风险与估值对象企业处于同样水平。如果竞争对手企业的增长速度、风险发生了变化，在估值时需要作出什么样的调整？当竞争对手企业的波动率从 35%增至 45%时，重新评价该企业价值。

推荐阅读材料

John C. Hull，*Options, Futures, and Other Derivatives*，Pearson Prentice Hall.

Johnnathan Mun (2003), *Real Options Analysis Course: Business Cases and Software Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

参考文献

Dixit, Avinash K. and Robert S. Pindyck (1994), *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press.
John C. Hull， *Options, Futures, and Other Derivatives*， Pearson Prentice Hall.
Johnnathan Mun (2003), *Real Options Analysis Course: Business Cases and Software Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
Martha Amran and Nalin Kulatilaka (1999), *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*, Harvard Business School Press.
Tom Copeland and Vladimir Antikarov (2003), *Real Options: A Practitioner's Guide*, TEXERE, Thomson.
乔纳森•芒，*实物期权分析*，邱雅丽等译，中国人民大学出版社 2006。
特里杰奥吉斯，*实物期权－灵活机动的管理和资源配置战略*，林谦译，清华大学出版社，2007。