上海财经大学
Shanghai University of Finance and Economics
1917-2017

0410 证券投资学

证券投资理论 II

2024年10月09日

目录

1 教学要点

2 资本资产定价模型

3 指数模型

4 有效市场理论

5 投资与编程

托宾模型

- 托宾在1958年发表了“投资组合选择原理” （The Theory of Portfolio Selection）
- 同年发表了“风险条件下的流动偏好行为” （Liquidity Preference as Behavior Towards Risk）

- 与马克威茨模型假设**全部证券都存在风险**不同，托宾模型取消了这一假设
- 托宾模型继承了马克威茨的**非负投资**假设，即风险资产不允许卖空，但无风险资产可以按一定的利率借入或借出。无风险资产的卖空等同于按无风险利率借入资金。

无风险证券，是指能够按时履约的固定收入证券，即没有任何风险的证券。无风险证券的利率称为无风险利率。在证券界通常将期限小于三个月的短期贴现国债视为无风险证券。

当无风险证券 f 与一种风险证券 I 进行组合时，组合的期望收益为：

$$E(R_P) = W_f R_f + (1 - W_f) R_i$$

组合的标准差为

$$\sigma_P = \sqrt{W_f^2 \sigma_f^2 + W_i^2 \sigma_i^2 + 2 W_f W_i \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

由于无风险证券 f 标准差应该是0

$$\sigma_P = (1 - W_f) \sigma_i$$

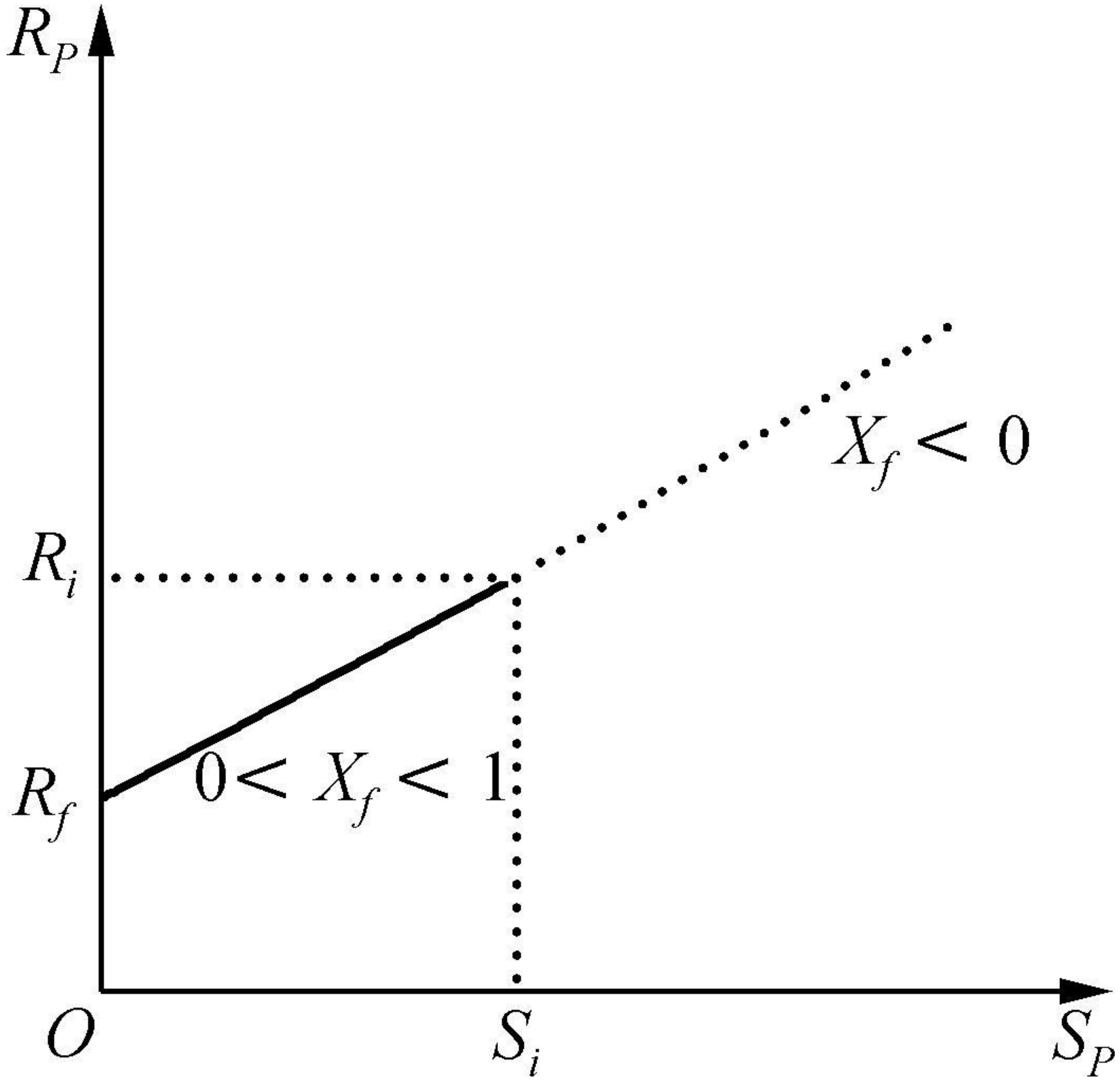
$$W_f = (\sigma_i - \sigma_P) / \sigma_i$$

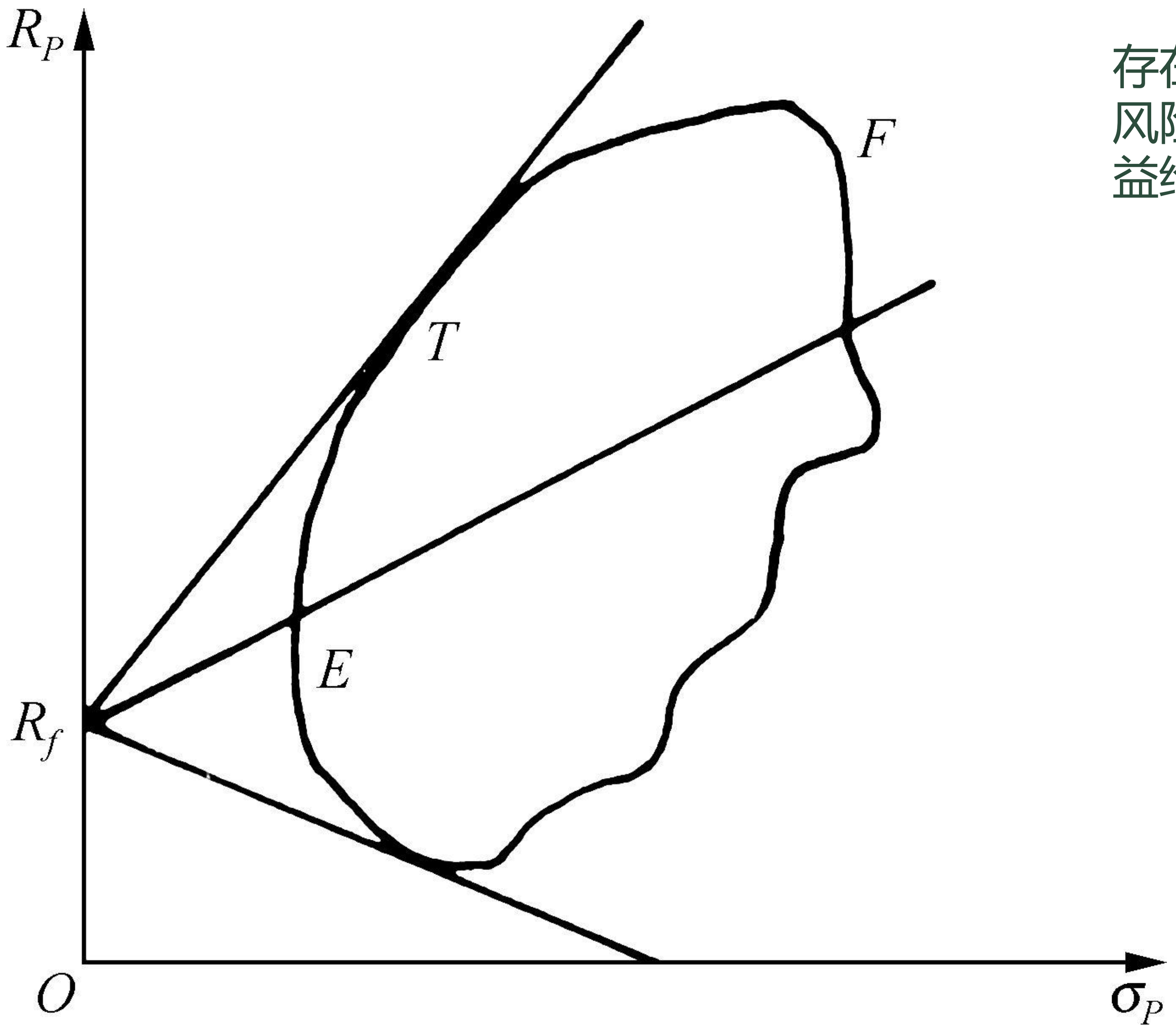
$$E(R_P)=R_f+[(R_i-R_f)/\sigma_i]\sigma_P$$

表明 $E(R_P)$ 与 σ_P之间呈线性关系，说明由无风险证券与有风险证券构成的全部组合都处在连接无风险证券与有风险证券两点的直线上。

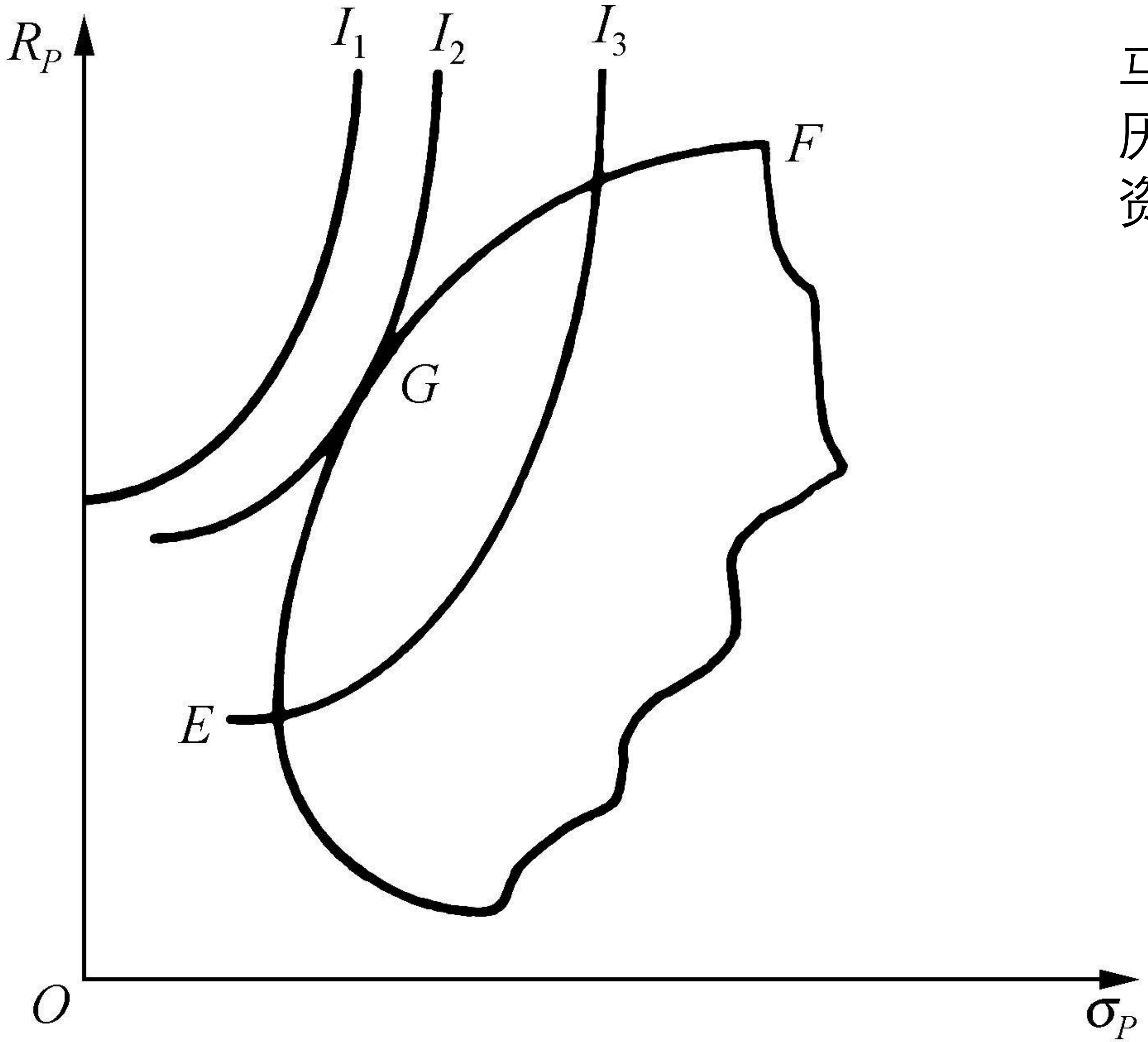
$$\sigma_P\begin{cases}? & W_f=1\\ ? & W_f=0\\ ? & 0<W_f<1\\ ? & W_f<0\end{cases}$$

01 有无风险资产时的效率边界

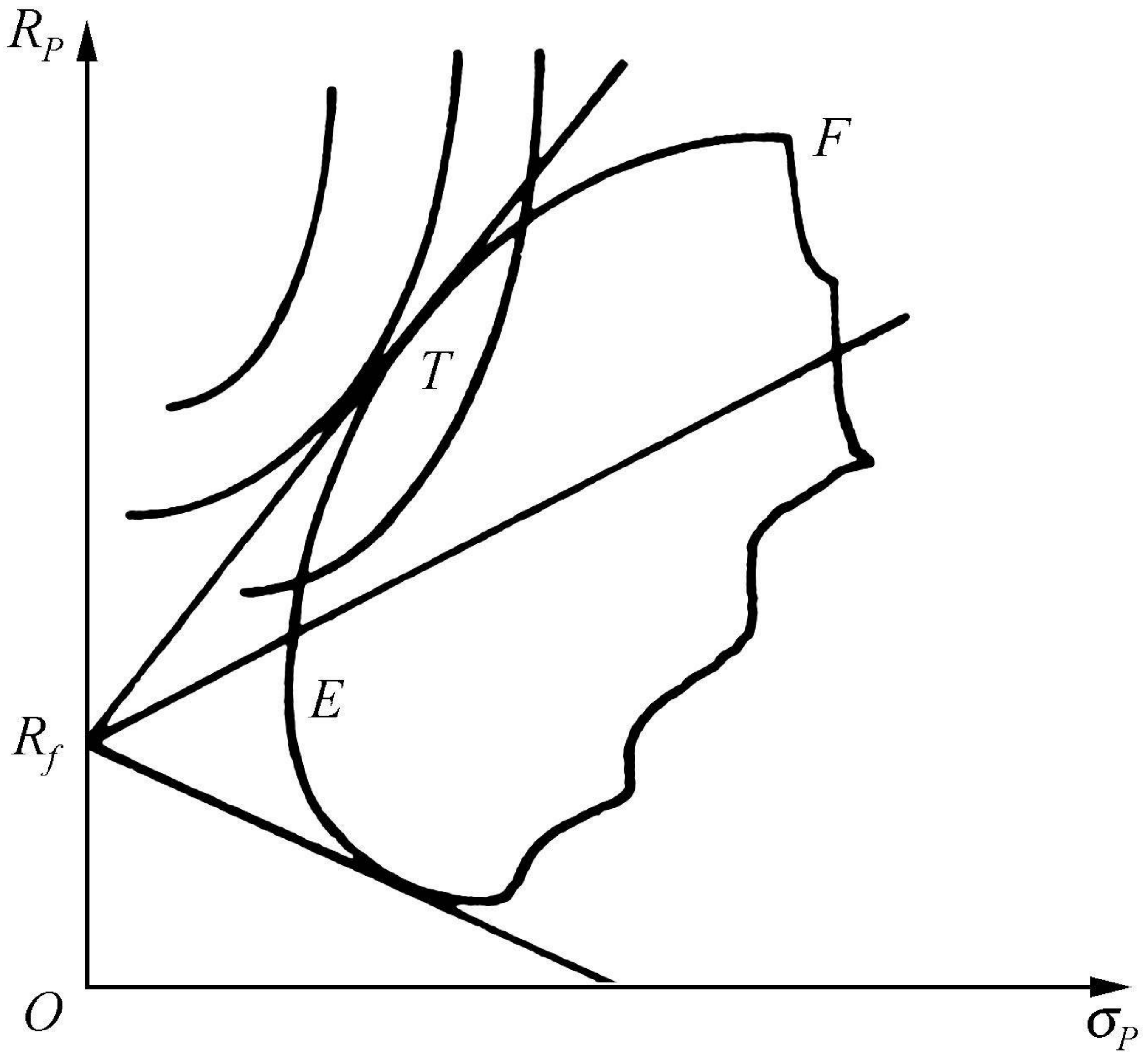




存在着唯一的投资组合，该投资组合与无风险证券进行新的组合所产生的风险与收益给投资者带来最大的效用。



马科维茨模型中风险厌恶投资者最优的投资选择?



托宾模型中风险厌恶投资者最优的投资选择？

假设有两种股票A和B，其相关系数ρ = 1，并且 $\sigma_A=2\%$ ，$\sigma_B=4\%$ ，$W_A=50\%$ ，$W_B=50\%$ 则组合方差为多少?

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R_P) &= W_A^2\sigma_A^2 + W_B^2\sigma_B^2 + 2W_A W_B\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \\ &= 0.5^2 \times 0.02^2 + 0.5^2 \times 0.04^2 + \\ &\quad 2 \times 0.5 \times 0.5 \times 1 \times 0.02 \times 0.04 \\ &= 0.0009\end{aligned}$$

$$\sigma_P = 0.03 = 3\%$$

由以上分析可知，如果两种证券收益完全正相关，则组合的收益与风险也都是两种证券收益与风险的加权平均数，故无法通过组合使得投资组合的风险比最小风险的证券的风险还小。

由于组合中资产收益之间完全不相关，即ρ = 0

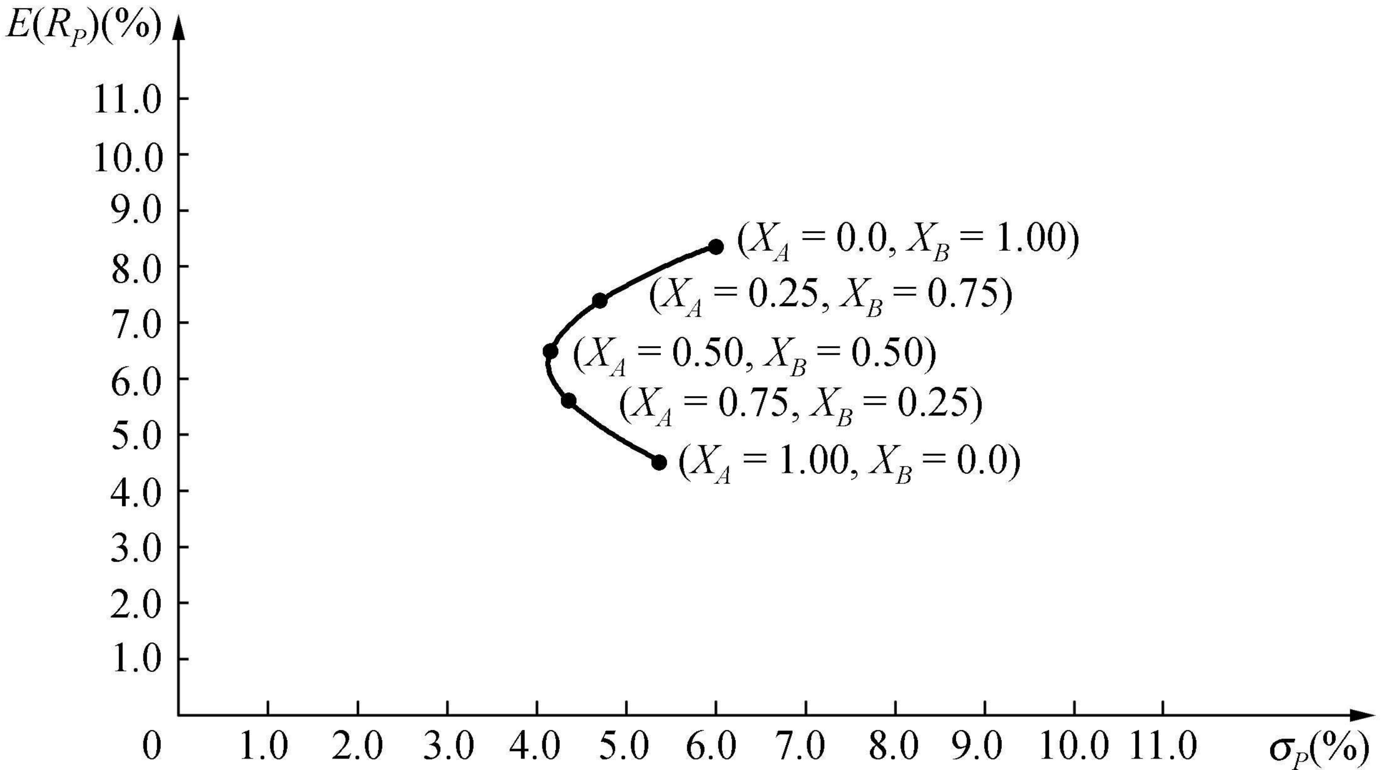
$$\mathrm{Var}(R_P) = W_A^2\sigma_A^2 + W_B^2\sigma_B^2 + 0$$

A、B两种资产的期望收益率分别为 $E_A = 4.6\%, E_B = 8.5\%$ ，标准差分别为

$\sigma_A = 5.62\%, \sigma_B = 6.33\%$

单位:%

W_A	W_B	σ_P	E_P
100	0	5.62	4.60
75	25	4.50	5.58
50	50	4.24	6.55
25	75	4.95	7.52
0	100	6.33	8.50



完全负相关时的情况（ρ = -1）

$$\mathrm{Var}(R_P) = W_A^2\sigma_A^2 + W_B^2\sigma_B^2 + 2W_A W_B\sigma_A\sigma_B$$

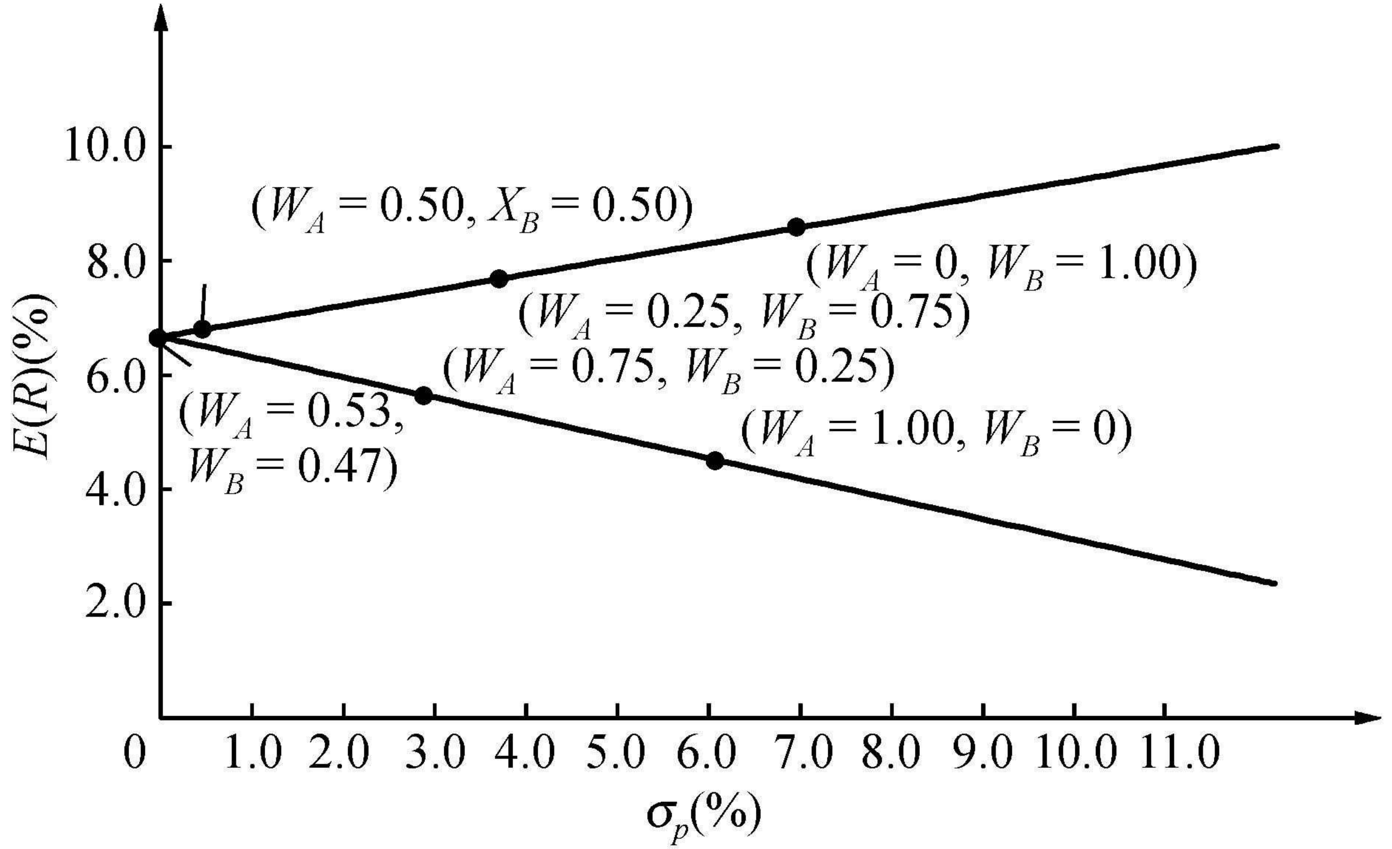
$$= (W_A\sigma_A - W_B\sigma_B)^2$$

$$\sigma_P = | W_A\sigma_A - W_B\sigma_B |$$

则当投资组合 $W_B = \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B}$ 或者 $\left(W_A = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}\right)$ 时，完全回避了风险。

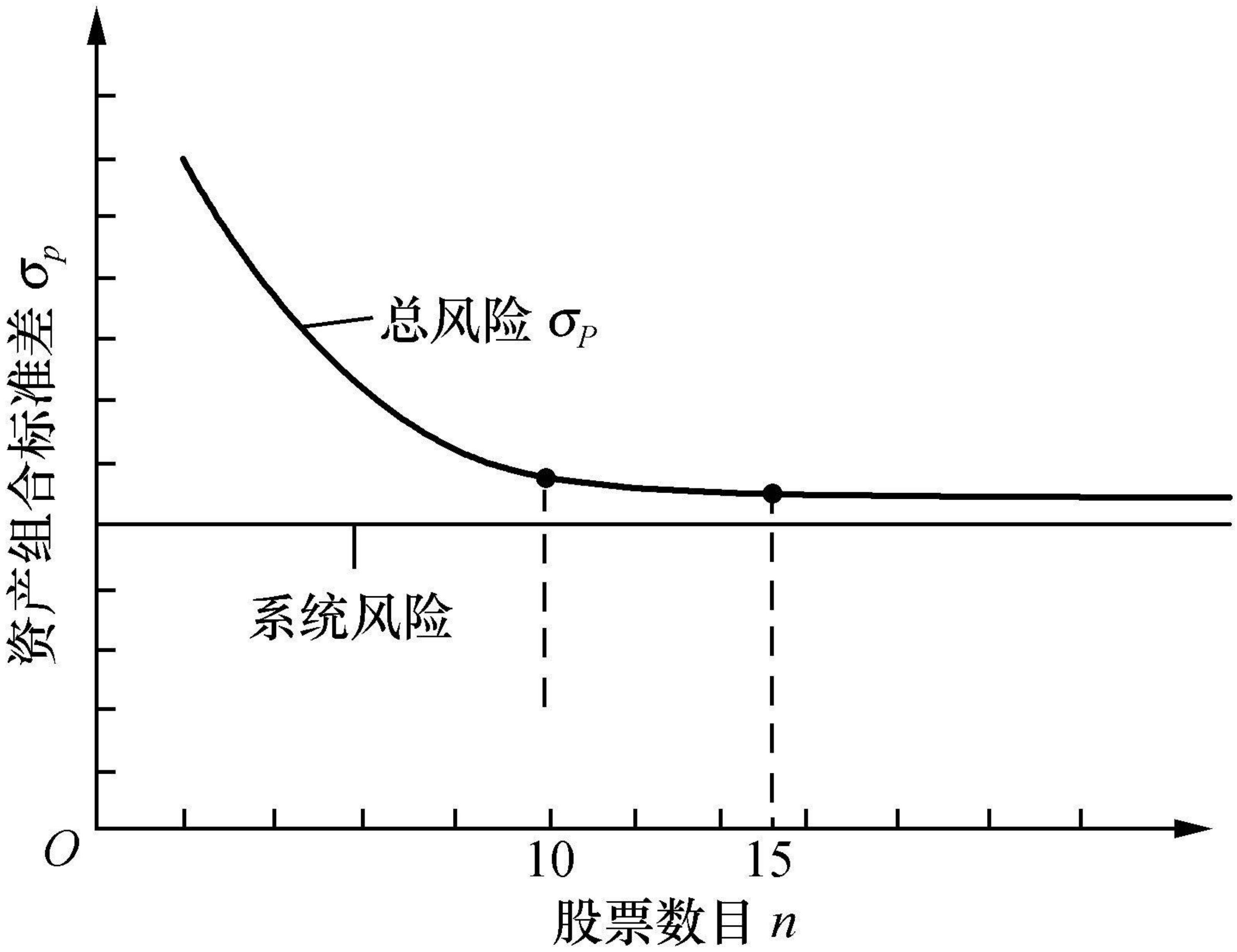
单位:%

W_A	W_B	σ_P	E_P
100	0	5.62	4.60
75	25	2.63	5.58
50	50	0.46	6.55
25	75	3.34	7.52
0	100	6.33	8.50



根据对以上三种情况的分析，我们可以得到以下结论：

（1）资产组合的收益与资产收益间的相关性无关，而风险则与之有很大关系；
（2）完全正相关时，组合风险无法低于两者之间最小的；
（3）完全不相关时，可以降低风险，随着风险小的资产的投资比重增加，组合风险继续下降，并在某一点达到风险最小；
（4）完全负相关时，组合风险可大大降低，甚至可以使风险降为零。



资产组合标准差 σ_p
总风险 σ_P
系统风险
O
10
15
股票数目 n

资产组合理论的局限：
第一，这一理论将收益率的期望值、标准差作为实际收益和风险的代表，但真实情况显然与这一假设有所不同。
第二，运用这一理论要求利用股票的历史数据求出其期望收益率、标准差及相关系数，但未来并不是历史的重演，用过去的数据来预测和判断未来显然是不够准确的。

资产组合理论的启示和指导：
第一，每一项资产的风险状况与其他资产间的相关关系决定了它在资产组合中所占的比重大小。
第二，少量的资产组合便可大幅度地降低投资风险。
第三，投资者的主要精力应放在估算各资产的期望收益、标准差和与其他资产的相关系数上。
第四，在一定条件下，为构造理想的投资组合，投资者可以借助于融资或融券。

威廉.夏普

威廉·F．夏普（William F．Sharpe）于1964年9月在《金融杂志》（*Journal of Finance*）上发表了题为“资本资产价格：风险条件下的市场均衡理论”（Capital Asset Prices：A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk）的文章。

1、资本资产定价模型（CAPM）的假设条件
2、资本市场线
3、证券市场线
4、均衡

前提假设

- 投资者个人是价格的接受者
- 投资者是理性的，均值—方差最优
- 单期投资
- 投资仅限于金融资产
- 没有税收和交易成本
- 信息可以毫无代价地为每一个投资者所获得
- 资产无限可分，以任何比例分配投资
- 投资者对每种证券收益和风险的预期都相同，且他们都是价格接受者

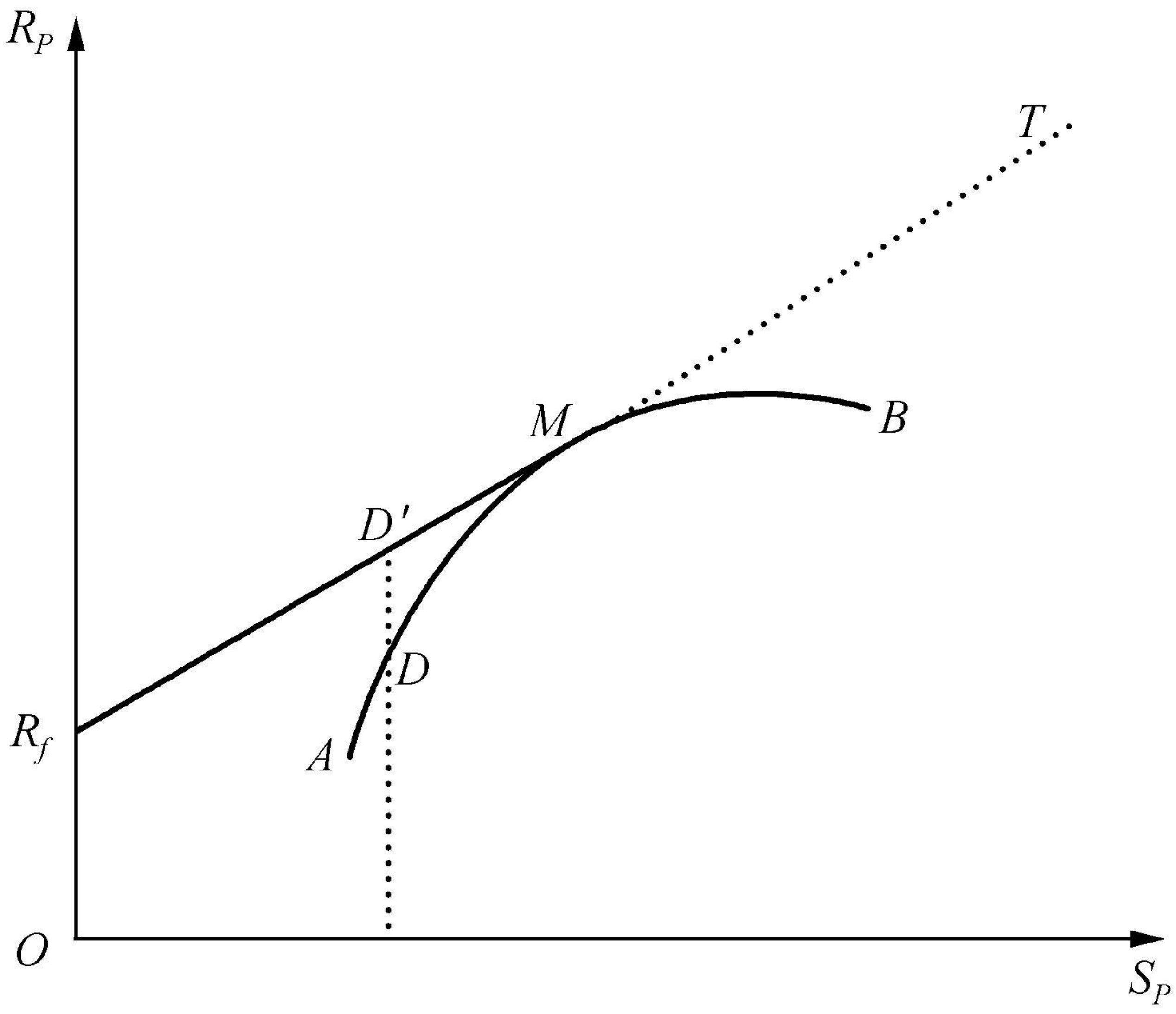
资本市场线 Capital Market Line

- 假设世界仅有两种风险资产
- 多种风险资产（参看资产组合理论）
- 引入无风险资产 （托宾模型）

无风险资产与市场组合组成的新组合的收益与风险的关系为：

$$R_p = R_f + (R_m - R_f)\sigma_p / \sigma_m$$

其中：R_p 为无风险资产与市场组合构成的新组合的收益；σ_p 为新组合的风险；R_f 为无风险收益率；σ_m 为市场组合的风险。



资本市场线 Capital Market Line

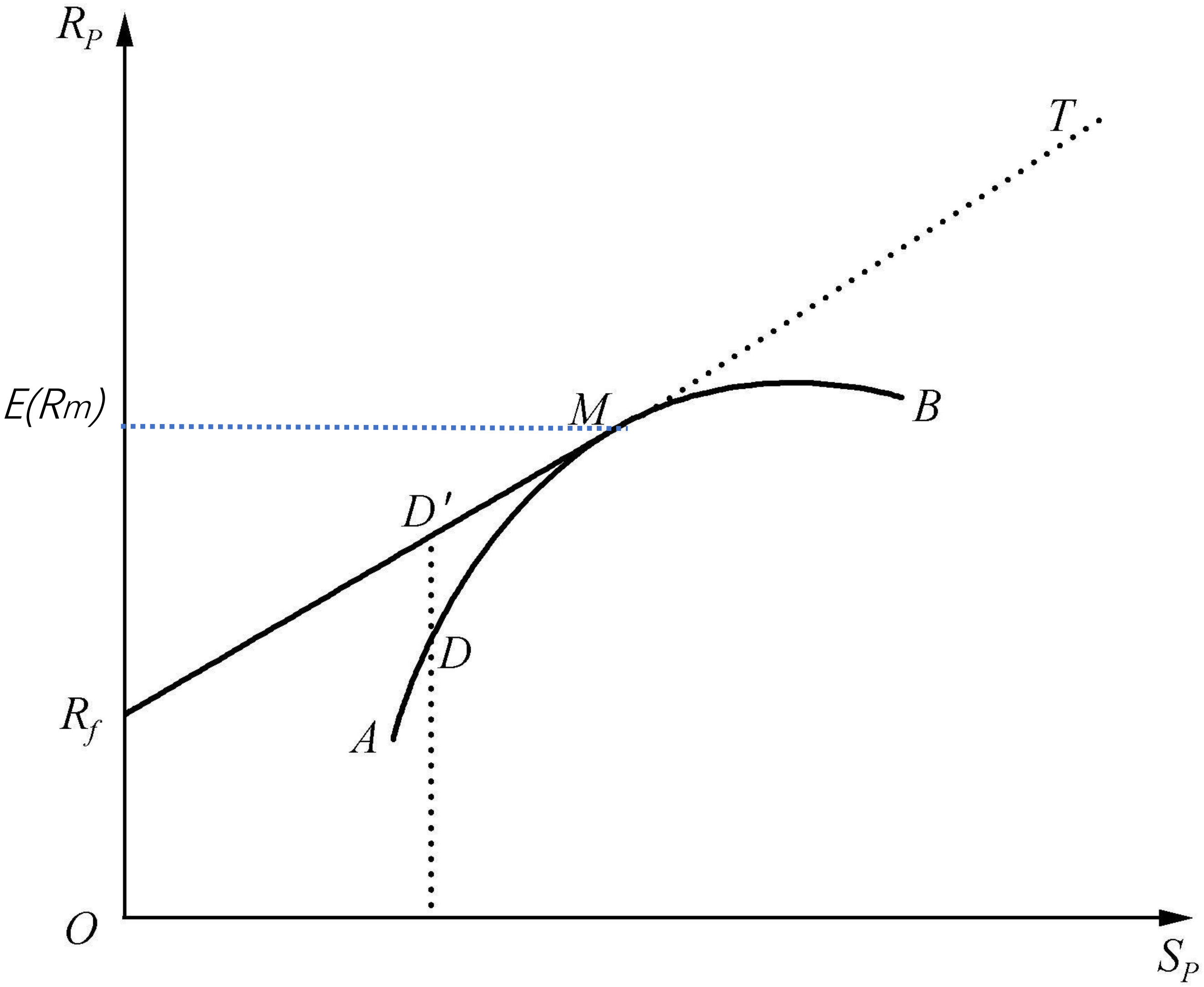
M = 市场组合

r_f = 无风险收益率

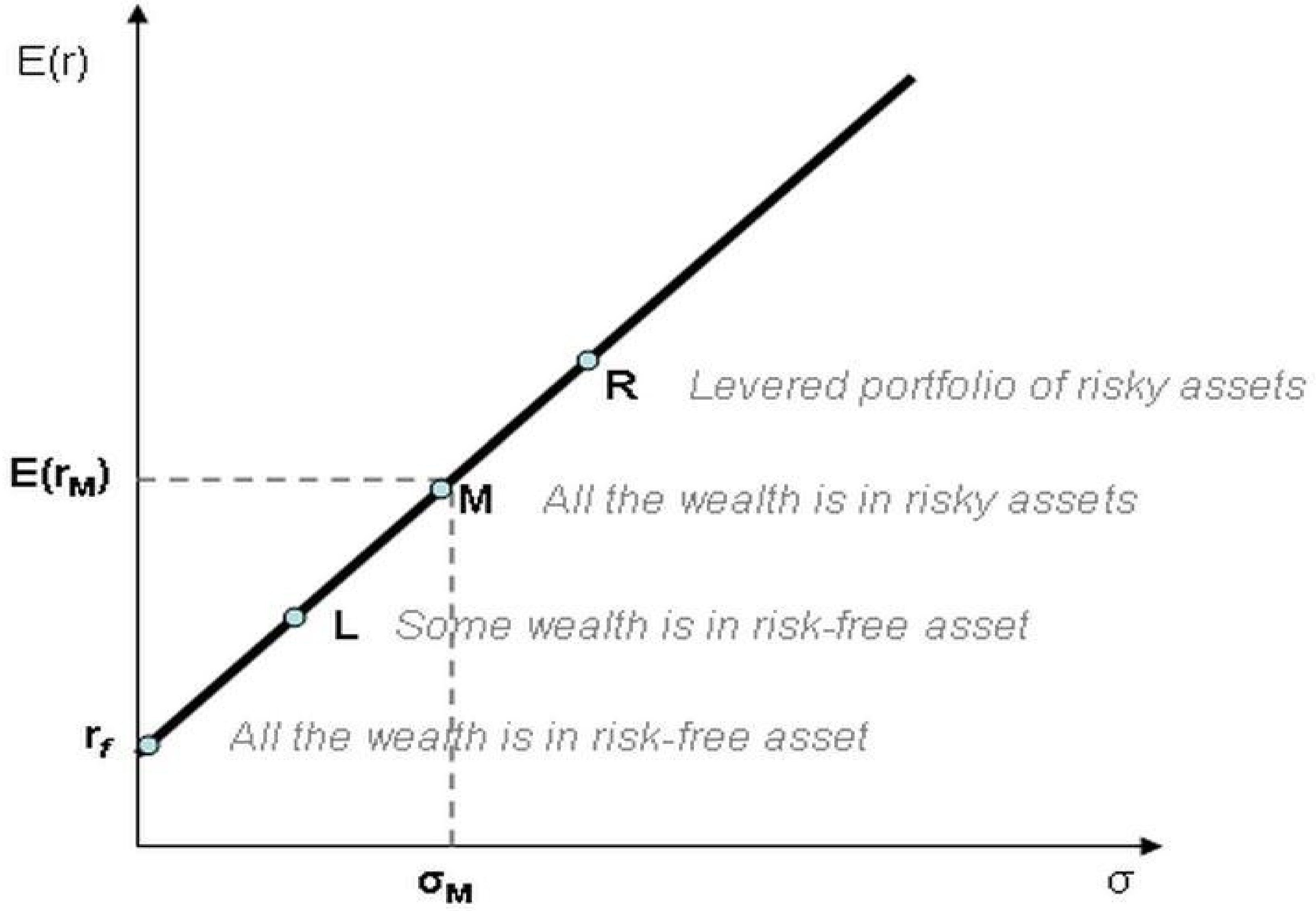
$E(r_M) - r_f$ = 市场风险溢价

$\dfrac{E(r_m)-r_f}{\sigma_M}$ = 风险的市场价格

= CML的斜率



效率边界R_f MT的斜率是$(R_m - R_f)/\sigma_m$ 该斜率表明单位总风险的市场价格。$(R_m - R_f)$ 代表风险溢价，即风险组合收益率超过无风险收益率的部分。


E(r)
$E(r_M)$
r_f
R
Levered portfolio of risky assets
M
All the wealth is in risky assets
L
Some wealth is in risk-free asset
All the wealth is in risk-free asset
σ_M
σ

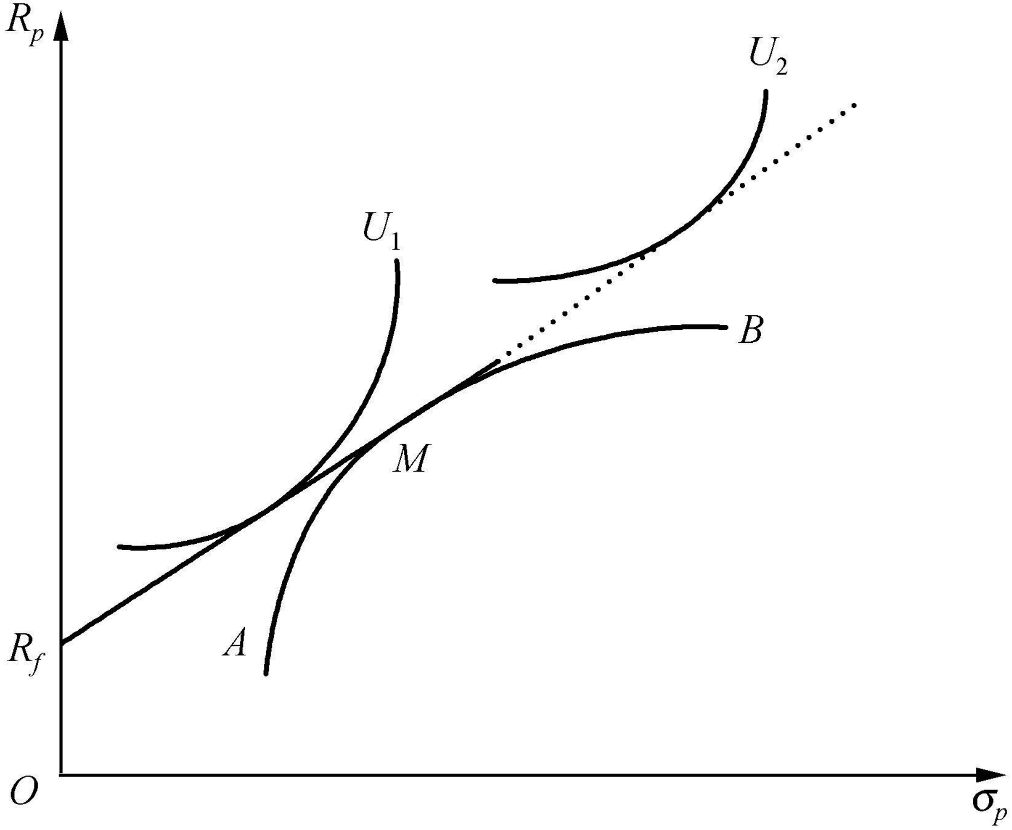
资本市场线总结

- CML用来衡量资产组合的有效性(efficiency)
- 对CML直线方程的解释：均衡证券市场的特征可以由两个关键的数字来刻画。
    - 第一个是CML直线方程的截距，就是无风险利率，也被称为货币的*时间价值*;
    - 第二个是CML直线方程的斜率，称为*风险的价值*。它告诉我们，当有效证券组合回报率的标准差增加一个单位时，期望回报率应该增加的数量。
    - 从本质来看，证券市场为时间和风险的交易提供场所，使得它们的价格由市场的供求关系决定。

- 斜率也叫Sharpe Ratio
- 构造指标 Sharpe Index来判断资产是否有效

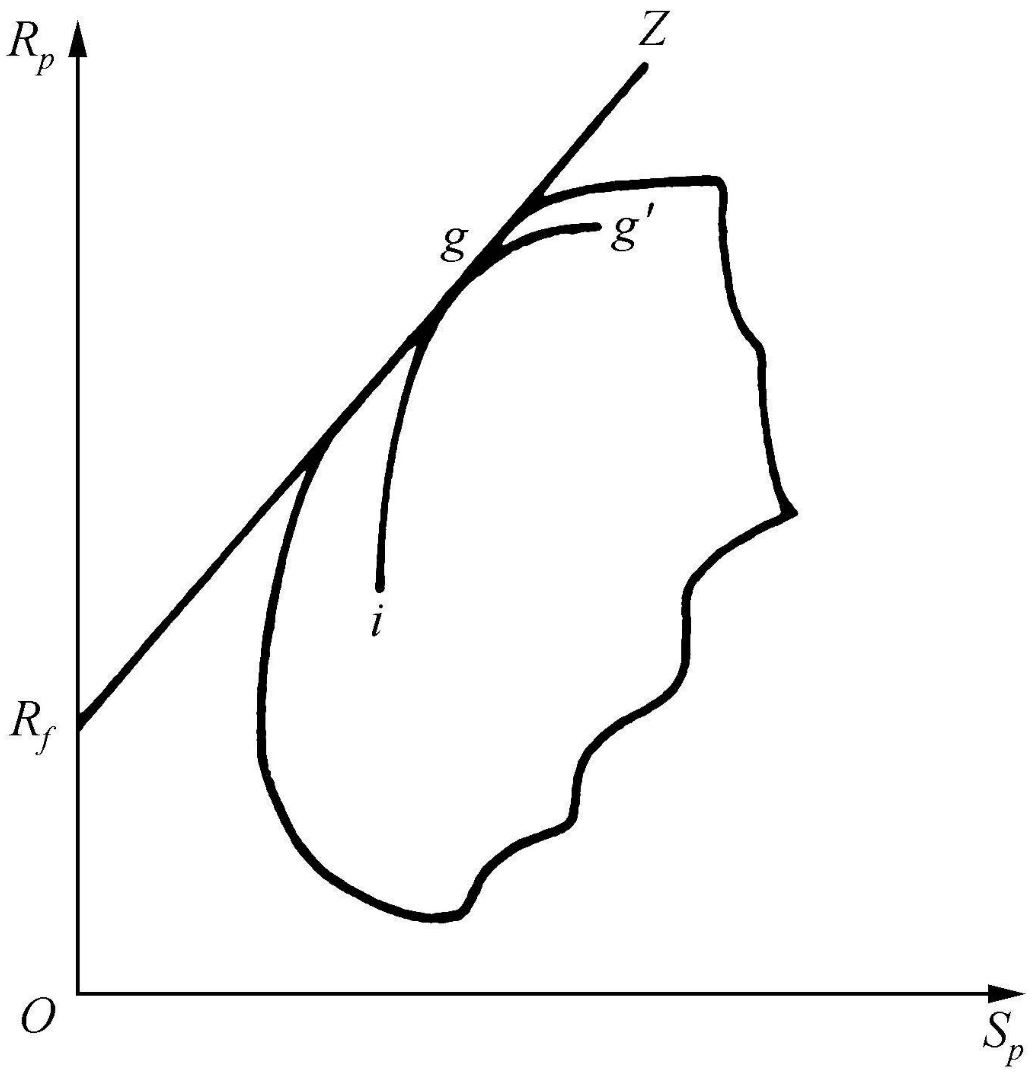
投资选择的分割定理

效用函数将决定投资者在效率边界上的具体位置。就是说，效用函数将决定投资者持有无风险资产与市场组合的份额。效用函数的这一作用被称为分割定理（separation theorem）。



证券市场线与资本资产定价模型

单个资产i是有效组合g中的一个资产。曲线igg′表明资产i与组合g重新进行组合后收益与风险的关系。假定投资于资产i的比例为α，投资于组合g的比例为1 - α，则α = 1表明全部资金都投资于资产i；而α = 0表明全部资金都投资于组合g；



证券市场线与资本资产定价模型

曲线igg′与资本市场线相切这一特征可以用来推导组合g中各单个资产的期望收益与单个资产不同类别风险之间的关系。

资产i与组合g的新组合的期望收益为

$$E[R_p] = \alpha E[R_i] + (1-\alpha)E[R_g]$$

资产i与组合g的新组合的标准差为

$$\sigma_p = \sqrt{\alpha^2\sigma_i^2 + (1-\alpha)^2\alpha_g^2 + 2\alpha(1-\alpha)\mathrm{COV}_{ig}}$$

根据相切关系，经过推导，可以得出：

$$(R_g - R_f) = \frac{R_i - R_g}{\mathrm{COV}_{ig} - \sigma_g^2} \times \sigma_g^2$$

$$R_i = R_f + (R_g - R_f)\frac{\mathrm{COV}_{ig}}{\sigma_g^2}$$

证券市场线与资本资产定价模型

当存在市场组合M时，单个资产i的收益率与其风险的关系为

$$R_i = R_f + (R_m - R_f)\frac{COV_{im}}{\sigma_m^2}$$

$$\beta_i = \frac{COV_{im}}{\sigma_m^2}$$

$$R_i = R_f + \beta_i (R_m - R_f)$$

这就是资本资产定价模型（capital assets pricing model，CAPM），又称为证券市场线（security market line，SML）。

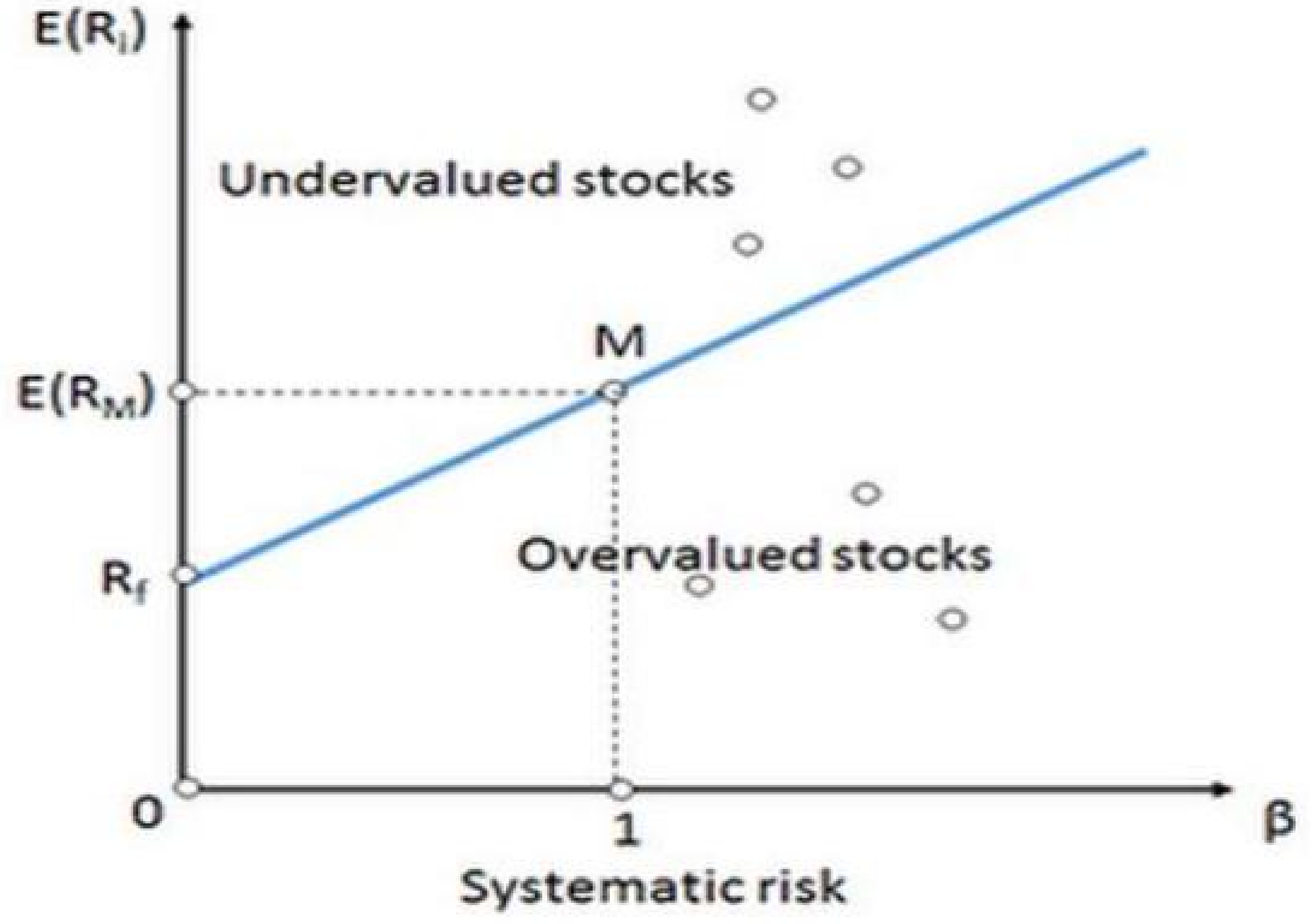
贝塔系数定义

- 单个证券的风险溢价是单个证券对市场组合风险的贡献度的函数

$$R_i = r_f + \beta_i (R_m - r_f)$$

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_m)}{\sigma_m^2}$$

- Beta系数用来衡量风险敏感度，该证券相对市场的波动性
- Beta=1表示该证券和市场波动一致
- Beta大于1或小于1表示该证券大于或小于市场波动


E(Ri)
Undervalued stocks
M
E(RM)
Rf
Overvalued stocks
0
1
β
Systematic risk

结论

- CML用来衡量资产组合的有效性(efficiency)
- SML用来衡量单个资产是否正确定价（fairly priced）
- 构造Jensen Index 来判断

资本市场线(CML) 与证券市场线 (SML) 是资本资产定价模型中两个重要的结论，二者之间存在内在的关系。

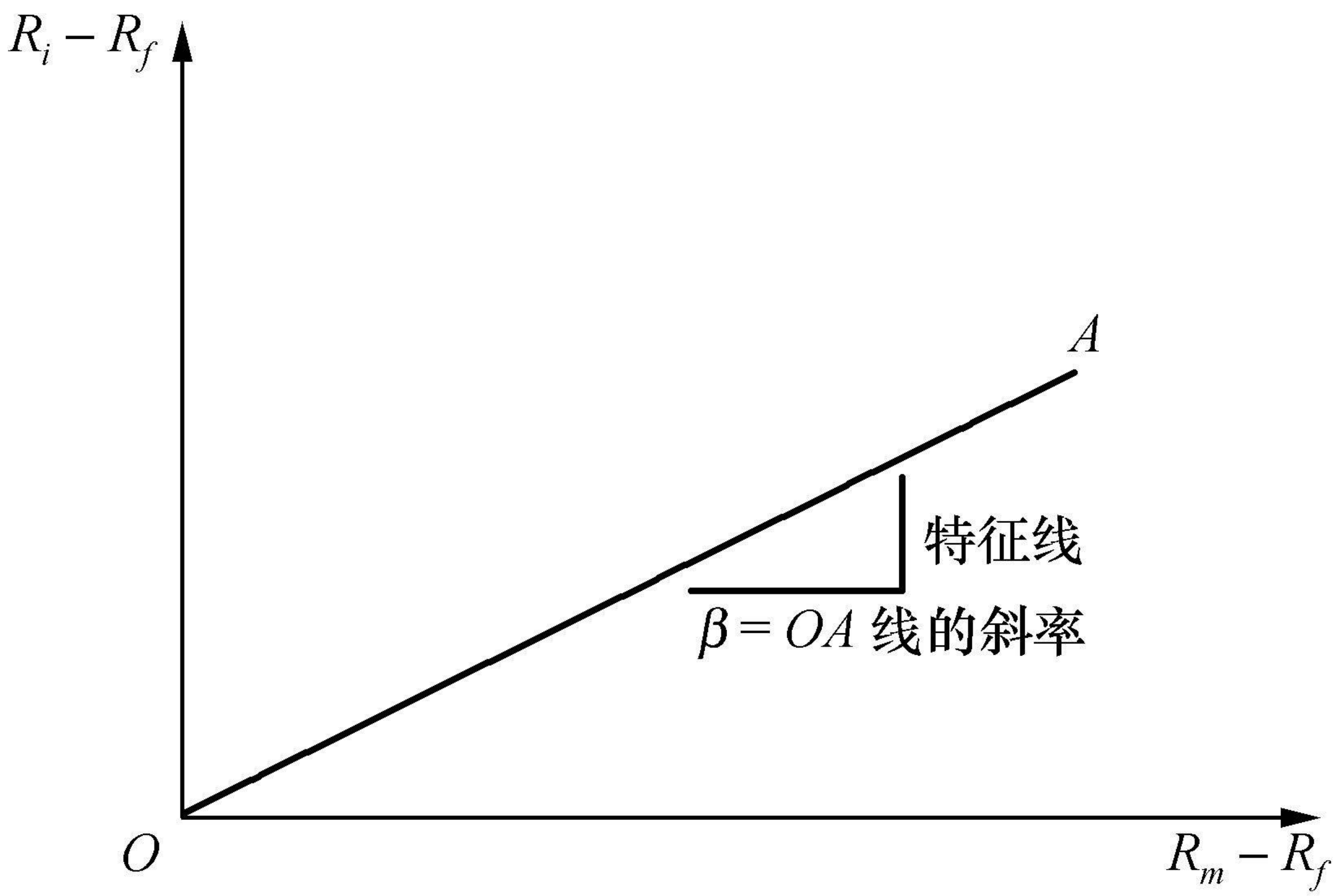
第一，资本市场线表示的是有效组合期望收益与总风险之间的关系，因此在资本市场线上的点就是有效组合；而证券市场线表明的是单个资产或者组合的期望收益与其系统风险之间的关系，因此在证券市场线上的点不一定在资本市场线上。

第二，证券市场线既然表明单个证券的期望收益与其市场风险或系统风险之间的关系，因此在均衡的情况下，所有证券都将落在证券市场线上。

第三，资本市场线实际上是证券市场线的一个特例，当一个证券或一个证券组合是有效组合的时候，该证券或证券组合与市场组合的相关系数等于1，此时证券市场线与资本市场线就是相同的。

特征线与资本资产价格

$$R_i - R_f = \beta_i(R_m - R_f)$$



特征线没有截距，换句话说，某一证券的超额收益是市场组合的超额收益与该证券系统风险（β值）的严格函数关系