新生研讨课

讲稿内容

0.1 从正规正交基说开去

1. 对于线性代数而言, 有没有内积完全是两门不同的课程. 那为什么要讨论内积?

2. 有了内积就有了垂直, 就能讨论勾股定理.

3. 在有限维内积空间上, 我们最喜欢讨论的是正规正交基?

4. 因为其可以快速写出任意向量的线性系数!

5. $C[-\pi,\pi]$ 上的内积, 但它是无穷维的.

6. 这个空间并不是完备的, 也就是说在内积定义的范数下, 看起来收敛的函数列并没有极限. 我们当然需要完备化, 没有 Cauchy 收敛原理的收敛很难办, 但我们今天先不去考虑它.

7. 那可以为这个空间找一组正规正交基吗?

8. $\{\sin nx, \cos nx, n \in \mathbb{N}_+\}$.

9. 将这组基组织成新的一组基 $e^{2n\pi ix}, n \in \mathbb{Z}$. 两两垂直

10. Fourier 展开

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dxe^{inx} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dxe^{inx}.$$

11. 后面, 我们会记

$$S_N(f) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dxe^{inx}$$

0.2 Fourier 级数有什么用

1. 当 Bernulli 猜测一切连续函数都可以写成如上形式时, 它指的就是在某种极限意义下. Euler 和 d'Alembert 对此不以为然. 他们认为尖角函数必然不能. 但 Fourier 研究热传导问题时, 确信 Bernoulli 猜的是对的.

2. 那 Fourier 的意思是什么收敛? 点态还是一致?

3. 我们首先需要知道, 由于 Riemann 引理, Fourier 级数的收敛都是局部的, 一点处是否收敛, 仅和该点附近的一个邻域内的函数值有关

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-2n\pi iy}dxe^{2n\pi ix} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\sum_{-N}^{N}e^{iny}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x-y)+f(x+y)]\frac{\sin\frac{2N+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

4. 而因为分母上的 $\sin\frac{y}{2}$, 在一点处连续不能保证点态收敛, 往往需要比连续性更好一点的条件, 例如可导.

5. 但是对连续函数, Fourier 级数却在某种意义下是一致收敛的: Cesaro 求和下一致收敛! 还记得 Cauchy 第一极限吗?

$$\frac{S_0(f)+\cdots+S_{N-1}(f)}{N} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\frac{1}{N}\frac{\sin^2\frac{Ny}{2}}{\sin^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y$$

6. 关键: 一种叫做渐进单位元的东西!

7. 用加权平均值理解它, 用 δ 函数思考它! (广义函数论)

8. Cesaro 求和下, Dirichlet 核恰好是渐进单位元!

9. 因而连续函数由其 Fourier 展开唯一决定, 因而这组基还是正规的!

10. 那不连续函数怎么办? 我们考虑另外一种收敛, 即内积所定义的距离意义下的收敛, 再次强调, 在这个意义下, 连续函数空间并不是完备的, 我们需要在其中加上 Riemann 可积函数, 平方可积无界函数等等许多函数才可以. 这个过程就是完备化, 就是给每一个看起来应该收敛的函数列 (基本列) 都分配一个极限, 就是要保证 Cauchy 收敛原理成立.

11. Bessel 不等式: 因为有了垂直, 就可以讨论投影, 投影必须小于总长度

12. 最小投影原理: 垂直距离最小

13. Paseval 等, 勾股定理: L^2 范数意义下的收敛! 万岁!

14. 这又有什么用? 传输信号时候去掉高频部分.

15. 从古至今, 一切军事家都明白一个道理: 想要事无巨细知道全部现实完全不可能, 而过分简化现实则易失之武断, 合格的军事家应该在两者之间达到平衡. 古人言小节不拘, 大事不糊涂. 克劳塞维茨用洞察力指代这一能力, 而马基雅维利则称之为速写能力. 这个能力其实就可以理解为做 Fourier 变换的能力, 将复杂函数用简单函数组成的函数项级数表示出来, 然后略去高频部分, 将它交给运气和勇气, 保留低频部分, 并用理智和经验分析它.

0.3 进一步到 Fourier 变换

1. 一切周期函数都可以 Fouier 展开, 那非周期怎么办?

2. Fourier 变换的自然推广

3. 强调因为定义的必然要求, 从此处开始要讨论复函数.

4. 为了收敛性, 首先考虑速降函数.

5. 速降函数变换后还是速降的, 线性映射

6. Plancherel 等式: 酉变换

7. Fourier 变换有什么用?

8. 线性变换下, 很多看不清楚的映射会变得很清楚, 这就是线性代数的核心课题. 很多变换, 在 Fourier 变换下会变成一种很简洁的形式. 尤其是求导.

9. 那一个很关键的问题: 这个变换可逆吗?

10. Fourier 逆变换

11. 还是因为渐进单位元, 具体而言, 是从 $e^{-\pi x^2}$ 入手证明它

12. 还有一些有趣的性质, 例如 Poisson 等式, 测不准原理等等.

0.4 FFT

1. 要想应用 Fourier 变换的基本思想, 必须 FFT. 同时, 在 FFT 下, 也可以更好理解 Fourier 变换到底在干什么, 毕竟, FFT 仅涉及有限维空间.

2. 怎么告诉对方你的速降函数是什么? 计算机处理不了连续变量

3. 分划取点, 足够密集

4. 噪音和损失信息

5. 羊肉串怎么吃?

6. 有限个点的 Fourier 变换!

7. 别忘了可以写出矩阵, 而且这是个酉矩阵

8. 问题是计算量太大

9. 神奇的 FFT, 极大降低计算量. 矩阵表示下可以看出分配律如何显著降低计算次数.

10. Python 里天天用

11. 一个应用举例: 快速近似求各阶导数.

Fourier 级数

本章我们介绍 Fourier 级数, 即周期函数的 Fourier 变换. 每一次你视频通话, 解压, 美颜, PS, 都要用到 Fourier 级数与变换.

如无特殊说明, 本章考虑的函数均为 2π 周期函数, 且其在定义域上 Riemann 可积. 很多理论对于反常积分意义下绝对可积的函数也是对的, 但是为了简洁, 我们先不去管它. 等到实分析时, 大家会学到 Lebesgue 可积函数的 Fourier 级数理论, 而反常积分意义下绝对可积函数都是 Lebesgue 可积的.

0.5 定义

本节我们先引入 Fourier 展开的定义, 以及一些展开实例.

0.5.1 动机: 用三角函数级数表示函数

多项式函数之外, 我们最熟悉的就是三角函数. 既然用幂级数可以表示函数, 那么, 是否可以用三角函数级数表示函数?

之所以想到用三角函数表示函数, 原因并不是这么简单. 其中历史, 要追溯到数学家们研究振荡问题. 描述振荡的函数, 理应是周期的. 最简单的周期函数自然是三角函数. Bernoulli 在 1753 年猜测说是不是只要研究三角函数级数就足够研究振荡问题的时候, Euler 和 d'Alembert 并不相信. 后来 Fourier 在研究热传导等物理现象时, 确信事情必如 Bernoulli 所言. 最终, 人们证明, 一般的函数, 都可以用三角函数级数, 也就是 Fourier 级数来表示.

1. 在学习 Taylor 展开时, 我们知道: 若 $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \mathrm{d}x^4$, 想要求出 a, b, c, d, 只要依次求四次导数即可.

2. 现在假设 $f(x) = a\sin x + b\sin 2x + c\cos 3x + d\cos 4x, x \in [-\pi, \pi]$, 那么我们能否通过 f 直接计算 a, b, c, d?

3. 如果我们把积分当成内积, 那么三角函数组就是这个内积下的正交函数组. 还能回想起在线性代数中, 如何将一个向量拆成正交向量组的线性组合吗? 注意除了 $\sin x$ 之外, 上述等式中任何三角函数乘 $\sin x$, 在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都是 0, 于是很容易得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} a\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

通过这个办法, 就得到

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

同样道理, 可以求得 b, c, d.

4. 这样, 对任何一个 $[-\pi, \pi]$ 上的可积函数 f, 可以合理猜测: 如有

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

应有 $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, 而

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \forall n > 0.$$

5. 更进一步. 虽然对任意一个 $[-\pi, \pi]$ 上可积函数, 我们还不知道它是否**等于**一个三角级数, 但总归可以利用上述方式, 定义一个三角级数出来: 即对 f, 可以定义一个三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

其中 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$. 而

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t, n > 0.$$

6. 我们称这个级数为 f 的 Fourier 级数, 将 f 决定这个级数这件事记为

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

注意, 目前仅仅是通过 f, 定义了一个三角函数级数 $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, 其中的 $\sim$ 号不是等号. 这个三角级数是否收敛, 乃至是否收敛于 f, 以何种意义收敛于 f 均是未知. 更一般地讲, 如何通过 Fourier 级数**还原**出函数, 是本章关心的主要问题.

7. Fourier 变换是在从另一个角度看待函数, 而从这个角度可以看清楚原本看不清楚的很多问题. 你其实对从另一个角度看函数这件事并不陌生, 只是当时惘然. 回顾多项式函数:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

你可以把它当成 x 的函数, 也可以把它看成由如下数组确定:

$$a_0, a_1, \cdots, a_n.$$

沿此思路, 你可以认为, 任意多项式都唯一对应一个数列:

$$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots,$$

只不过这个数列中仅有限项非零.

8. 而 Fourier 变换, 则是想把任意函数, 看成一个数列

$$a_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots,$$

并希望通过如下公式

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

还原出原本的函数.

9. 可以如下方式通俗理解 Fourier 级数的作用: 你要存一张包含全部细节的自拍照是不可能的. 那删掉哪些内容呢? 删掉鼻子也不行, 删掉眼睛也不行. 最后, 就这里删一点, 那里删一点. 具体做法就是将函数写成 Fourier 级数, 然后将 n 比较大的 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ 删掉. 就好像你拿一个板擦, 轻轻擦过照片, 擦去了高频部分— n 越大, $\sin nx, \cos nx$ 的频率越高. 同样道理, 也可以解释 Fourier 级数在信号, 通讯等邻域的应用.

10. 从古至今, 一切军事家都明白一个道理: 想要事无巨细知道全部现实完全不可能, 而过分简化现实则易失之武断, 合格的军事家应该在两者之间达到平衡. 古人言小节不拘, 大事不糊涂. 克劳塞维茨用洞察力指代这一能力, 而马基雅维利则称之为速写能力. 这个能力其实就可以理解为做 Fourier 变换的能力, 将复杂函数用简单函数组成的函数项级数表示出来, 然后略去高频部分, 将它交给运气和勇气, 保留低频部分, 并用理智和经验分析它.

0.5.2 展开实例

当务之急是让大家相信, Fourier 级数是可以计算出来的. 为此, 本小节介绍几个展开实例. 我们要选择这些例子, 一方面是因为它们自然出现在信号处理等应用中, 一方面是因为它们的展开比较典型, 可以帮助我们看到, 做 Fourier 级数展开时, 到底发生了什么.

1. 首先是最简单, 但又在信号处理等领域很重要的例子: 方波.

   例 0.5.1. *对函数*
   $$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$
   做 Fourier 展开.

2. 直接计算以下积分可得
   $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 = a_0,$$
   而
   $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}.$$
   因此有
   $$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}\sin nx,$$
   即
   $$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

3. 现在假设你要通过一个最简单的通讯工具—不能视频不能语音不能文字只能发一些数字—把上述例子中的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

告诉我. 你并没有什么直接的办法. 但是你可以按照 Fourier 变换告诉我一个数列, 于是我就可以按照这个数列还原出这个函数. 可是一个数列里包含无穷多个数, 有限时间内总是发送不完全的. 没关系, 你只需要传送前面几项, 而对 n 足够大的 a_n, b_n 弃之不顾, 因为只要前有限项, 我还原所得到的

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

在 0 点之外, 就已经很像

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

了. 为了**看到**这一点, 我推荐大家用 Geogebra 画一下上述三角级数前 5 到前 8 项和的图像.

4. 在学习幂级数时, 我们曾计算过 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. 而它恰好是其和函数的 Fourier 级数

例 0.5.2. *对函数*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & x \in (0, \pi] \\ 0 & x = 0 \frac{x-\pi}{2} \quad x \in [-\pi, 0) \end{cases},$$

做 Fourier 展开.

直接计算可见其 Fourier 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$. 在这里我们提醒大家注意. $x = 0$ 处具体取什么值, 对 Fourier 级数没有任何影响.

5. 若函数不是 $[-\pi, \pi]$ 上函数, 则可以扩充到 $[-\pi, \pi]$ 上再展开. 你可能会怀疑, Fourier 级数是用积分定义的, 那扩充之后展开不会有影响吗? 不必担心, 先将其做为一种技艺学习, 后面我们会介绍 Fourier 级数的局部性质, 那时候你就知道扩充定义没有任何问题了.

例 0.5.3. *将 $f(x) = x, x \in [0, \pi]$ 扩充为 $[-\pi, \pi]$ 上偶函数, 并展开其 Fourier 级数. 此时 Fourier 级数中只有 $\cos nx$ 项, 我们称之为余弦级数.*

直接计算即可知:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \pi, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 2\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}.$$

即其余弦级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

6. 类似地, 有正弦级数.

例 0.5.4. *将 $f(x) = x, x \in [0,\pi]$ 扩充为 $[-\pi,\pi]$ 上奇函数, 并展开其 Fourier 级数. 此时 Fourier 级数中只有 $\sin nx$, 我们称之为正弦级数.*

直接计算, 可得其正弦级数就是:

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

7. 后面将要学到的 Riemann 局部原理保证在 $(0,\pi)$ 上, 上面得到的两个级数相等:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

而由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

可见等式在 0 处成立而在 π 处不成立. 这是由 Fourier 级数的收敛性决定的, 后面我们会提到这一点.

8. 作为练习, 请补齐上述计算中关于求定积分的细节, 并自行计算下面这个例子:

例 0.5.5. *将 $f(x) = x, x \in [0,\pi]$ 扩充为 $[-\pi,\pi]$ 上函数*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0) \\ x, & x \in [0,\pi) \end{cases},$$

并做 Fourier 展开.

9. 虽然有了定义, 可是 Fourier 级数毕竟不那么容易理解. 你总不免疑惑: 三角级数函数究竟是怎么变成函数的. 就此问题, 一方面我们推荐大家利用 Geogebra 画一下这些三角级数前 5 到前 8 项和的图像, 另一方面推荐大家去 Bilibili 上搜三角函数级数的动画视频. 强烈推荐.

0.6 局部理论

若 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx+b_n\cos nx$$

点态收敛, 乃至一致收敛于 f, 则你直接就得到了一个从级数还原函数的办法.

本节, 我们就关心这种还原方式.

注意, 如无特殊说明, 我们仅考虑 Riemann 可积函数.

0.6.1 放到圆周上

首先我们介绍一个构造, 让 Fourier 级数中的系数更整洁一点. 当然, 这个构造远远不止这点作用, 它以更本质的方式描述了 Fourier 级数理论.

1. 对于函数 f 而言, Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

有一点比较麻烦, 就是 $\sin nx, \cos nx$ 纠结在一起, 因此你同时需要两套系数: a_n, b_n, 其中 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t$, 而

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t, b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t, n>0.$$

2. 一个简单的办法, 可以将 $\sin nx$, $\cos nx$ 区分开, 就是在 $\sin nx$ 前加上一个虚数 i. 于是

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\sin nx+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\cos nx\\
=\ &-\int_{-\pi}^{\pi}f(t)i\sin nt\,\mathrm{d}ti\sin nx+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\cos nx.
\end{aligned}$$

3. 更进一步, 既然 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$, 就有

$$\begin{aligned}
&-\int_{-\pi}^{\pi}f(t)i\sin nt\,\mathrm{d}ti\sin nx+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\cos nx\\
=\ &\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{int}\,\mathrm{d}te^{-inx}+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-int}\,\mathrm{d}te^{inx}.
\end{aligned}$$

4. 因此, 对 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数 f, 其 Fourier 级数就等于

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t e^{inx}.$$

5. 这样, 你只需要一套系数. 只不过要注意一点, 如果你要谈 Fourier 级数收敛的话, 在这种情况下, 应该是

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t e^{inx}\\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t e^{inx}.\end{aligned}$$

6. 我们将记 $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$ 为 f 的 Fourier 级数中 e^{inx} 的系数.

7. 从现在开始, 我们将或多或少讨论复值函数. 在本书中, 复值函数与实值函数理论完全平行. 毕竟, 任何一个复值函数, 都可以写成

$$f(x) + ig(x)$$

   的形式, 其中 f, g 均为实值函数. 尤其是 e^{ix}, 你就可以将其看作 $\cos x + i\sin x$ 来理解.

8. 需要注意的是, 所谓对复数取绝对值, 就是对复数取模长, 即 $|x+iy| = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2}$, 因此 $|e^{ix}| \equiv 1$.

9. 在接下来的内容中, 我们默认可以通过改变在 π 这一点处的函数值, 将 $[-\pi,\pi]$ 上函数扩充为 $\mathbb{R}$ 上的 2π 周期函数, 毕竟改变一个点处函数值对积分而言没有任何影响. 若 $f(\pi) = f(-\pi)$, 且函数 f 在 π 处左极限, 在 $-\pi$ 处右极限都存在且等于 $f(\pm\pi)$, 则认为 f 在 $\pm\pi$ 处是连续的. 接下来, 若说一个函数是 $[-\pi,\pi]$ 上 2π 周期连续函数, 那就是在强调 f 不止在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 且还有 $f(\pi) = f(-\pi)$.

0.6.2 Dirichlet 积分

本小节将用到定积分一章介绍过的渐进单位的概念.

1. 请大家先回顾一个概念: 若一列 $[-\pi,\pi]$ 上函数 $\{g_n\}$ 满足
   - $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_n\,\mathrm{d}x = 1$,

- $\int_{-\pi}^{\pi} |g_n| \,\mathrm{d}x$ 有界,
- 对任意 $\pi > \delta > 0$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\pm\delta}^{\pm\pi} |g_n(x)| \,\mathrm{d}x = 0$,

则称之为渐进单位元.

2. 对于渐进单位 $\{g_n\}$ 而言, 将其扩充为 $\mathbb{R}$ 上的 2π 周期函数, 则只要 2π 周期函数 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积, 在 x 处连续, 则必有
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g_n(x-t) \,\mathrm{d}t \to f(x).$$

3. 不仅如此, 若函数 $f(x)$ 是 2π 周期连续函数, 对相应证明只需做微小调整即可见, 收敛
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g_n(x-t) \,\mathrm{d}t \to f(x)$$
是一致的.

4. 回到 Fourier 级数. 对任意固定 $x \in [-\pi, \pi]$, 只需简单改写, 就会发现 Fourier 级数是否在 x 处收敛, 其实就等价于
$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \,\mathrm{d}t e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)} \,\mathrm{d}t$$
是否收敛.

5. 记
$$D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{inx},$$
若 $\{D_N\}$ 是渐进单位, 则只要 f 在 x 处是连续的, 就有
$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) \,\mathrm{d}t,$$
即 Fourier 级数在 x 处收敛于函数值.

6. 虽然
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-N}^{N} e^{inx} \,\mathrm{d}x \equiv 1,$$
但是 $\{D_N(x)\}$ 并非渐进单位, 因为
$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| \,\mathrm{d}x = \infty.$$

7. 这一极限的计算并没有看上去那么困难:

   a. 我们有
$$D_N = \frac{\sin\frac{2N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

   b. 而我们知道 $x \in [-\pi, \pi]$ 时, 必有 $|\sin\frac{x}{2}| < |\frac{x}{2}|$, 因此
$$|D_N(x)| \geq 2|\frac{\sin\frac{2N+1}{2}x}{x}|.$$

   c. 简单换元即可得, 积分
$$\int_0^\pi |\frac{\sin\frac{2N+1}{2}x}{x}|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{2N+1}{2}\pi} |\frac{\sin x}{x}|\,\mathrm{d}x.$$

   d. 而反常积分
$$\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}|\,\mathrm{d}x$$

   发散, 结论得证.

8. 我们称 D_N 为 Dirichlet 核. 分析 Fourier 级数是否收敛, 很多时候都是在分析 Dirichlet 核的性质.

9. 回顾一个函数之间的运算: 周期卷积. 设 f, g 均为 $\mathbb{R}$ 上 2π 周期函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积, 则定义函数
$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

   函数 $f * g$ 称为 f 与 g 的周期卷积.

10. 因此, 积分
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

    定义的函数就是 f 与 D_N 的周期卷积, 即 $f * D_N$. 利用变量替换即可证明:
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t.$$

11. 下面我们列举一些周期卷积的重要性质, 它们有助于我们明白为什么要定义周期卷积这个运算:

    1) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

2) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$.

3) $f * g = g * f$.

4) $f * g$ 连续.

5) $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

12. 前两条是平凡的. 借助变量替换 $s = x - t$ 以及周期函数积分性质很容易证明第三条.

13. 若假设 f, g 中有一个连续, 则按照连续函数定义即可直接证明第四条. 而对于 f, g 仅是 Riemann 可积的情况, 则只需利用我们之前介绍过的命题: 对任意 $\epsilon > 0$, 一定存在连续函数 F, G, 使得
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - F| \, \mathrm{d}x < \epsilon, \int_{-\pi}^{\pi} |g - G| \, \mathrm{d}x < \epsilon.$$
这就保证了一般 Riemann 可积函数卷积也是连续的. 请自行补齐细节.

14. 我们将在多元微积分里证明第五条. 此时知道它们的意义更为重要. 前三条说周期卷积是一个好乘法, 满足分配律交换律结合律, 还满足线性性. 第四条是说, 哪怕两个函数的性质一般, 它们周期卷积之后所得函数也很好: 连续. 这很容易想象, 毕竟是积分定义的函数. 最后一条是最重要的: 它是说 Fourier 系数之间的乘法, 对应的是函数的周期卷积.

15. 由于 $f * D_N$ 比较重要, 我们将记之为 $S_N(f)$, 即
$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sum_{-N}^{N} e^{int} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x-t) + f(x+t)] \frac{\sin \frac{2N+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$
而研究 Fourier 级数是否在 x 处的收敛性, 就是研究 $S_N(f)(x)$ 是否收敛, 以及是否收敛于 $f(x)$.

0.6.3 Riemann 引理与局部性原理

Riemann 引理对于 Fourier 级数理论至关重要, 本小节我们就用 Riemann 引理推出关于 Fourier 级数收敛性的局部性原理, 这一原理叙述了 Fourier 级数与幂级数之间的重要区别.

1. 为方便阅读, 我们再次叙述 Riemann-Lebesgue 引理如下:

   定理 0.6.1 (Riemann-Lebesgue 引理)**.** *设 f 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积, 则:*

   $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)e^{\pm inx}\,\mathrm{d}x = 0.$$

   注意我们曾提到过, Riemann 可积与反常积分绝对收敛, 均是 Lebesgue 可积, 而条件收敛反常积分却不是.

2. 配合 Dirichlet 核, 我们可以推出关于 Fourier 级数收敛性的局部性原理:

   定理 0.6.2. *设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 则其 Fourier 级数在 x 点处是否收敛, 收敛于几, 仅仅依赖于 $f(x)$ 在 x 的 δ 邻域 $(x-\delta,x+\delta)$ 上的性质, 此处 δ 为任意小正数. 在该命题中, 当 $x=\pm\pi$ 时, 其 δ 邻域就是指 $[-\pi,-\pi+\delta]\cup[\pi-\delta,\pi]$.*

3. 这一原理说明了 Fourier 级数是否在一点处收敛是函数本身的局部性质. 其证明并不难.

   证明. a. 利用 Dirichlet 核, Fourier 级数在 x 处是否收敛取决于

   $$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_N(x-t)\,\mathrm{d}t$$

   是否收敛.

   b. 简单换元可见

   $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_N(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\frac{2N+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

   c. 在 $[\delta,\pi]$ 上, 由 Riemann 引理可见

   $$\int_{\delta}^{\pi}\frac{[f(x+t)+f(x-t)]}{\sin\frac{t}{2}}\sin\frac{2N+1}{2}t\,\mathrm{d}t\to 0,$$

   因此 Fourier 级数收敛与否, 收敛到哪里, 完全取决于

   $$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\delta}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\frac{2N+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

   □

4. 局部原理也可表述如下: 假设 f, g 均在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积, 且存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有 $f(x) = g(x)$, 则

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{in(x_0 - t)} \, \mathrm{d}t - \sum_{n=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{in(x_0 - t)} \, \mathrm{d}t = 0.$$

5. 局部原理是 Fourier 级数与幂级数之间很大的区别. 回顾幂级数, 它在一个点处收敛, 就在一片上收敛. 可是 Fourier 级数却可能在这里收敛, 在那里发散. 请大家体会这一点, 更有助于我们了解进一步发展 Fourier 级数的动机.

6. 再展开说一点, 在以后大家学习复变函数的时候会发现, Fourier 级数可以看成单位圆盘上复函数幂级数限制在边缘圆周上的级数. 当初学幂级数的时候, 大家就有体会, 收敛半径为 1 的幂级数在 $(-1, 1)$ 上整整齐齐, 但是在 ± 1 处却不见得, 其在 1 处敛散性与 -1 处无关, 反之亦然. Fourier 级数比幂级数更复杂, 可以对照这个事实理解.

0.6.4 点态收敛结论略述

既然 Fourier 级数在一点处收敛与否完全由函数在该点处局部性质决定, 那么判断其是否收敛的条件一定是局部条件. 本小节仅用一个小练习为例说明这一点.

1. 我们仅用一个简单的小练习, 体会一下如何利用 Dirichlet 核给出收敛条件:

   例 0.6.1. *设 f 是 $[-\pi, \pi]$ 上 2π 周期可积函数. 对任意 $x \in [-\pi, \pi]$, 若存在 $\delta > 0, M < \infty$, 使得*

   $$|f(x-t) - f(x)| \le M|t|, \forall t \in (-\delta, \delta),$$

   则 f 的 Fourier 级数点态收敛于 $f(x)$.

2. 证明. a. 既然 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) \, \mathrm{d}t \equiv 1$, 那么要证明

   $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin \frac{2N+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t = f(x),$$

   就是要证明

   $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin \frac{2N+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t = 0.$$

b. 由条件, 我们知道
$$\frac{(f(x-t)-f(x))}{t}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$$
在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 于是由 Riemann 引理, 结论得证. □

3. 当然, 由上述结论可以推得: 若函数 f 在 x 处可导, 则其 Fourier 级数在 x 处收敛于 $f(x)$. 例如在 $(-\pi,\pi)$ 上, 有恒同函数 $g(x)=x$ 等于其 Fourier 级数
$$\sum_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\,\mathrm{d}te^{inx}=\sum_{n\neq 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-int}\,\mathrm{d}te^{inx}=-\sum_{n\neq 0}\frac{1}{in}e^{in\pi}e^{inx}.$$

4. 对证明稍加调整, 我们可以得到

例 0.6.2. *若如下两个极限*
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t},\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t)-f(x^-)}{t},$$
均存在, 则函数 f 的 Fourier 级数在 x 处收敛于 $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

也就是说, 要想 Fourier 级数收敛, 并不需要左右极限存在且相等. 但一般而言, 要想 Fourier 级数在局部上收敛, 总需要一个比左右极限均收敛更强一点的条件.

5. 虽然 Fourier 级数在跳跃间断点除也可能收敛, 其在间断点附近依然会展现出比较激烈的震荡, 这种现象被称为 Gibbs 现象. 我们以下例说明这一点

例 0.6.3. *设*
$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ 0 & x\in(-\frac{\pi}{2},0]\end{cases}$$
则其 Fourier 展开为
$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$
设
$$S_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$
则存在正数列 $\{x_n\}$, 使得 $x_n\to 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_n)>1$.

6. 要证明这个结论, 我们需要利用曾经提到过的不等式
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x > \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

   证明. a. 注意
$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\int_0^x \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

   b. 令 $x_n = \frac{\pi}{2n}$, 我们有
$$S_n(x_n) > \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{x_n} \frac{\sin 2nt}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$
   最后一个等式源于变量替换 $x = 2nt$. 因此
$$\varliminf_{n\to\infty} S_n(x_n) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

   c. 注意
$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$
   为 Leibniz 级数, 因而
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x > \frac{\pi}{2},$$
   于是
$$\varliminf_{n\to\infty} S_n(x_n) > 1.$$
   证毕. □

7. 我们建议大家用 Geogebra 画图, 从图上看一下
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$
   是如何收敛的, 只需要画到 $n = 8$, 就可以很清晰地看到 Gibbs 现象. 某种程度上, 你可以认为 Gibbs 现象源于 Fourier 级数的逐项可积性: $S_n(0)$ 要趋于 $\frac{1}{2}$, 就必然要在 0 附近小于 1, 陡然落到 $\frac{1}{2}$ 去, 而为了让 $\int_0^x S_n(t)\,\mathrm{d}t$ 依然收敛于 $\int_0^x 1\,\mathrm{d}t$, 就必须在一些稍远的 x 处, 做到 $S_n(x) > 1$.

8. 另外, 我们确实可以找到这样一个例子: 函数 f 在某点 $x \in [-\pi, \pi]$ 处连续, 但是其 Fourier 级数在该点处发散. 这样的例子不止一个, 还相当多, 我们曾在介绍 Baire 纲定理时提到过这一点. 也就是说, 虽然对于好多不是无穷次可导的函数, Fourier 级数均收敛于 $f(x)$, 但对于连续函数, 我们好像依然无法利用 Fourier 级数还原出原本的函数. 等等, 事实果真如此吗?

0.6.5 Fourier 级数的 Cesàro 求和

既然我们的目的是还原函数, 那为什么一定要利用级数收敛来还原呢? 例如, 我们可以利用 Cesàro 求和.

1. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积函数, $\sum_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$ 为其 Fourier 级数. 我们不去考虑函数列
$$S_N(f)=\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}$$
的极限, 而是考虑相应 Cesàro 求和, 即考虑
$$\frac{S_0(f)+\cdots+S_{N-1}(f)}{N}.$$

2. 注意 $S_N(f)=f*D_N(f)$, 因此
$$\frac{S_0(f)+\cdots+S_{N-1}(f)}{N}=f*\frac{D_0(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}.$$
记
$$F_N(x)=\frac{D_0(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}.$$
这就是 Fejér 核. 于是我们有
$$\frac{S_0(f)+\cdots+S_{N-1}(f)}{N}=f*F_N$$

3. 重点是, Fejér 核是正函数. 简单计算可知
$$F_N(x)=\frac{1}{N}\frac{\sin^2\frac{Nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$
请大家自行完成这一计算.

4. 利用 $F_N(x)=\frac{D_0(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}$ 可以直接证明
$$\int_{-\pi}^{\pi}F_N(f)\,\mathrm{d}x=2\pi,$$
那么自然就有
$$\int_{-\pi}^{\pi}|F_N(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}F_N(x)\,\mathrm{d}x=2\pi$$
有界.

5. 最后, 对任意 $|x| \geq \delta > 0$, 易见

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

因此有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\pm\delta}^{\pm\pi} F_N(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

6. 也就是说, Fejér 核是渐进单位, 于是

定理 0.6.3. *对一切 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积函数 f, 只要 f 在 x 处连续, 就有 $f * F_N(x)$ 收敛于 $f(x)$. 若 f 本身是连续 2π 周期函数, 则一定有 $f * F_N(x)$ 一致收敛于 f.*

7. 这是一个非常棒的结论, 它可以说明:

命题 0.6.4. *若函数 f 的各项 Fourier 系数 $\hat{f}(n) \equiv 0$, 则 f 在一切连续点 x 处均取值为 0.*

以及

命题 0.6.5. *若对两个 2π 周期连续函数 f, g, 有 $\hat{f}(n) \equiv \hat{g}(n)$, 那么 $f = g$.*

这两个命题说明, Fourier 级数, 可以完全还原出连续点处的函数值, 也可以还原出 2π 周期连续函数.

8. 还可推出如下定理:

定理 0.6.6. *假设 f 为 2π 周期连续函数, 且 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$ 收敛, 则一定有 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ 一致收敛于 f.*

利用 Weierstrass 判别法即可证明一致收敛, 关键是证明收敛于 f, 即 $f = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$. 而这只需验证等号左右两边连续函数的 Fourier 级数相同即可, 而这几乎是显然的.

9. Fourier 级数的 Cesàro 求和也直接给出了 Weierstrass 第二逼近定理:

定理 0.6.7 (Weierstrass 第二逼近定理)**.** *对于任意 2π 周期连续函数, 均有三角多项式函数列一致逼近它.*

0.6.6 Fourier 级数的 Abel 求和

与 Cesàro 求和一样, Abel 求和也可以应用到 Fourier 级数的研究中去. 本小节简略叙述 Abel 求和在 Fourier 分析中的应用.

1. 设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积 2π 周期函数, 与其直接考虑其 Fourier 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$, 不如考虑 Abel 求和 $\lim\limits_{r\to 1^-}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}a_n e^{inx}, 0\le r<1$.

2. 将 $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$ 带入上述求和, 就可以得到
$$\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}a_n e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(x-t)\,\mathrm{d}t,$$
其中 $0\le r<1$ 时, $P_r(x)$ 等于
$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}.$$
我们称 $\{P_r(x)\}_{0\le r<1}$ 为 Poisson 核.

3. 重点是, 当 $r\to 1^-$ 时, Poisson 核是渐进单位. 因此若 f 是 2π 周期连续函数, 则当 $r\to 1^-$ 时, 有
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(x-t)\,\mathrm{d}t$$
一致收敛于 f.

4. 但是, Abel 求和在 Fourier 级数理论中的应用远远不止这么简单. 请大家自行阅读相关文献.

0.7 整体理论

上一节关心的问题都是 Fourier 级数在一点处是否收敛, 实质上是从局部角度研究 Fourier 级数的收敛. 然而 Fourier 级数是一种从整体角度—用定积分—定义的级数, 理所应当, 我们应该考虑其整体收敛理论. 这句话是什么意思?

同样, 为简洁考虑, 如无特殊说明, 本节仅考虑 $[-\pi,\pi]$ 上 2π 周期连续函数.

0.7.1 假设这是一个内积空间: 平方和逼近

其实好好琢磨我们究竟想从收敛这个概念里索取什么, 就可以发现, 除了点态收敛和一致收敛, 还有好多好多收敛. 严格叙述本小节的理论, 需要一些实分析和泛函分析的预备. 我们仅在模糊这些必备知识的情况下简要介绍相关理论.

1. 其实说到底, 我们对函数列收敛的要求, 只有两条:
   - 看上去收敛的, 就应该有极限, 当然极限也是函数, 即所谓完备性. 本节暂时不讨论这一点, 留待实分析.
   - 收敛函数列的极限应该唯一. 这是本节的重点.
2. 如果我们能定义函数之间的距离, 那么就有足够的把握构造一种满足上述两点要求的收敛. 所谓距离, 应该是对任意两个函数 f, g 定义一个非负实数 $d(f, g)$, 并且按照常识, 需要满足三条: 对任意函数 f, g, h,
   - 1) 我到你的距离和你到我的距离是相同的: $d(f, g) = d(g, f)$,
   - 2) 距离不小于零, 为零当且仅当是同一个: $d(f, g) \geq 0$, $d(f, g) = 0$ 当且仅当 $f = g$,
   - 3) 三角不等式: $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

   为了满足分析的需要, 其实还应该要求距离有完备性. 不过目前我们先不讨论这个问题.
3. 一旦有了距离, 我们就可以定义函数列 f_n 收敛于 f 当且仅当
   $$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0.$$
4. 例如我们学过的 $\sup|f(x) - g(x)|$, 就给出了两个连续函数之间的距离, 利用这个距离定义出来的函数列收敛, 就是一致收敛.
5. 对于 $[-\pi, \pi]$ 上的 Riemann 可积实函数 f, g, 可以定义它们之间的内积
   $$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg\,\mathrm{d}x.$$
   若 f, g 是值为复数的函数, 那么其内积就定义为
   $$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}x.$$
6. 这个内积就定义了连续函数 f, g 之间的距离:
   $$d(f, g) = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-g|^2\,\mathrm{d}x}.$$
   利用线性代数和定积分的知识, 很容易验证, 对于连续函数而言, 这确实是一个距离. 特别地, 记此距离为
   $$d(f, g) = \|f-g\|_2.$$
   对于一个函数, $\|f\|_2 = \|f-0\|_2$, 这个数称为这个函数的 2 范数.

7. 那么根据这个距离, 就可以定义函数列的均平方收敛: 称连续函数列 $\{f_n\}$ 均平方收敛到连续函数 f, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\|_2 = 0$. 根据距离的性质就可以知道, 函数列 $\{f_n\}$ 的均平方收敛极限一定是唯一的. 当然, 即便不要求极限函数连续—仅分析连续函数对于数学和应用而言都是远远不够的—其极限也是唯一的, 只不过说明这一点, 需要说清楚两个函数相同是什么意思, 这就需要实分析的知识.

8. 另外, 连续函数列在 2 范数下的极限函数未必是连续函数, 即连续函数空间在 2 范数所定义极限下不是完备的. 至于在这个极限下完备空间应该是什么样的, 即 Cauchy 收敛原理在什么空间下成立, 我们也将其留待实分析中去讨论.

9. 现在, 我们就可以提出下述问题, 假设 $[-\pi,\pi]$ 上连续函数 f 的 Fourier 级数为 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$, 那么是否有

$$\lim_{N\to\infty}\|\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx} - f\|_2 = 0?$$

10. 这个问题更深刻地解释了 Fourier 级数的意义: 我们知道,

$$\{1, \sqrt{2}\cos x, \sqrt{2}\sin x, \cdots, \sqrt{2}\cos nx, \sqrt{2}\sin nx, \cdots\}$$

是一组正规正交系, 或者也可以说 $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一组正规正交系. 那么按照线性代数的说法, Fourier 级数就是将 f 投射到上述正规正交系张成的线性空间上去. 而我们的问题是, Fourier 级数这个线性组合, 是否恰好给出了 f 自己, 也就是说, f 是否恰好可以写成上述正规正交系的线性组合.

11. 这里我们故意模糊了无穷维这件事. 请大家先把这件事放一放, 实分析和泛函分析中会仔细发展无限维线性空间理论.

0.7.2 Parseval 等式: 勾股定理

本小节的主要目的, 是在 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上连续 2π 周期函数时, 肯定回答上节最后提出的问题, 并证明 Parseval 等式:

$$\|f\|_2 = \langle f, f\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|^2.$$

注意此处若 $\hat{f}(n)$ 是复数, 则 $|\hat{f}(n)|$ 是指它的模长, 即 $\sqrt{\hat{f}(n)\overline{\hat{f}(n)}}$.

1. 首先回顾线性代数中的投影. 假设 v 是内积空间 $(W,\langle,\rangle)$ (实或复均可以) 中的一条向量, $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}\subset W$ 为这 m 个正规正交向量张成的一个 m 维子空间, 记为 W', 则 v 到 W' 的投影, 就是

$$v'=\langle v,e_1\rangle e_1+\langle v,e_2\rangle e_2+\cdots+\langle v,e_m\rangle e_m.$$

2. 一方面, 一定有

$$|\langle v,e_1\rangle|^2+|\langle v,e_2\rangle|^2+\cdots+|\langle v,e_m\rangle|^2\le|\langle v,v\rangle|,$$

所谓直角三角形斜边最长.

3. 另一方面, 向量 v' 是整个 W' 中距离 v 最近的向量, 也就是说

$$\|v-v'\|=\langle v-v',v-v'\rangle=\inf_{w\in W'}\langle v-w,v-w\rangle.$$

所谓垂线最短.

4. 这两个结论在 Fourier 分析中也是成立的, 它们分别对应了 Bessel 不等式与最佳逼近原理. 连证明都与线性代数中如出一辙.

5. 我们先叙述并证明 Bessel 不等式—“直角三角形斜边最长”:

定理 0.7.1 (Bessel 不等式)**.** *设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积函数, 则对任意 $N\in\mathbb{N}_+$, 有*

$$\sum_{-N}^{N}|\hat f(n)|^2\le\|f\|_2^2.$$

6. 证明很直接, 请大家直接计算

$$\begin{aligned}&\langle f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat f(n)e^{inx},f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat f(n)e^{inx}\rangle\\=\;&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat f(n)e^{inx})\overline{(f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat f(n)e^{inx})}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

就会发现它等于 $\|f\|_2^2-\sum\limits_{-N}^{N}|\hat f(n)|^2$, 也就是说

$$\|f\|_2^2-\sum_{-N}^{N}|\hat f(n)|^2=\langle f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat f(n)e^{inx},f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat f(n)e^{inx}\rangle\ge0.$$

7. 这说明, $\{\sum\limits_{-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2\}$ 是单调有界数列, 而 $\|f\|_2^2$ 为其上界, 因此它一定收敛. 问题是, 它是否收敛到 $\|f\|_2^2$. 另外, 容易理解, 上述证明中的中间结果

$$\|f\|_2^2-\sum_{-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2=\langle f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx},f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}\rangle$$

其实是一种勾股定理.

8. 当然, 同时也有 $\|f-\sum\limits_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}\|^2$ 是单调递减的, 因此也一定有极限. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\|f\|_2^2-\sum_{-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2\\ =&\lim_{N\to\infty}\langle f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx},f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}\rangle\\ =&\lim_{N\to\infty}\|f(x)-\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}\|_2^2.\end{aligned}$$

9. 现在我们来证明那个“垂线最短”的定理:

定理 0.7.2. 设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上 *Riemann* 可积函数. 对于任意 N, 我们有

$$\|f-\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}\|_2^2=\min\{\|f-\sum_{-N}^{N}a_ne^{inx}\|_2^2\}$$

其中 $\{a_{-N},a_{-N+1},\cdots,a_0,a_1,\cdots a_N\}$ 是任意数组. 而且,

$$\|f-\sum_{-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}\|_2^2=\|f-\sum_{-N}^{N}a_ne^{inx}\|_2^2$$

当且仅当 $a_n=\hat{f}(n)$.

10. 证明也很简单: 请直接计算

$$\|f-\sum_{-N}^{N}a_ne^{inx}\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\sum_{-N}^{N}a_ne^{inx})\overline{(f(x)-\sum_{-N}^{N}a_ne^{inx})}\,\mathrm{d}x,$$

它等于

$$\|f\|_2^2-\sum_{-N}^{N}|\hat{f}(n)|^2+\sum_{-N}^{N}|a_n-\hat{f}(n)|^2.$$

另注意到等式

$$\|f\|_2^2 - \sum_{-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 = \|f - \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}\|^2$$

即可得到全部结论.

11. 我们必须强调, 截止目前, 本小节的所有证明均与 f, e^{inx} 乃至积分的具体性质无关, 这些证明中的所有运算, 都不过是最基本的线性代数中的内积运算. 你只管将 f 当成一个向量, 积分当成内积, $\{e^{inx}\}$ 当成内积下的一列正交向量 $\{v_n\}$, 上述证明全都依然正确. Bessel 不等式也好, 垂线最短距离也好, 它们百分之百都是线性代数. 然而接下来, 我们必须借助分析, 来证明 Parseval 等式.

12. 回顾 $\|f - \sum\limits_{-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}\|^2$ 是单调递减有界的, 它一定有极限, 假设这个极限就是 A. 设 f 为 $[-\pi, \pi]$ 上连续 2π 周期函数. 于是 f 的 Fourier 级数的 Cesàro 求和一致收敛于 f, 因此对任意 $\epsilon > 0$, 一定有 N, 使得

$$\|f - \frac{S_0(f) + \cdots + S_N(f)}{N+1}\|_2 \leq \epsilon.$$

13. 然而, $\frac{S_0(f)+\cdots+S_N(f)}{N+1}$ 不过是 $\{e^{-iNx}, \cdots, e^{iNx}\}$ 的线性组合, 它虽然一致收敛于 f, 但它不是 f 的最佳逼近, 也就是说,

$$\|f - \frac{S_0(f) + \cdots + S_N(f)}{N+1}\|_2 \geq \|f - \sum_{1}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}\|_2,$$

因此有

$$\epsilon \geq \|f - \sum_{N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}\|_2 > A.$$

14. 既然 $A \leq \epsilon$ 对任意 $\epsilon > 0$ 成立, A 只能是 0. 于是

$$0 = \lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx}\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{+N} |\hat{f}(n)|^2.$$

因此, 对 2π 周期连续函数而言, 我们得到了下述 Parseval 等式, 它是 Fourier 分析里的勾股定理:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

15. 事实上, Parseval 等式对一切 $[-\pi,\pi]$ 上 Lebesgue 平方可积的函数 (包括 Riemann 可积函数, 反常积分绝对收敛函数) 都是对的, 只需利用连续 2π 周期函数在 Lebesgue 平方可积函数中的稠密性, 即对任意 Lebesgue 平方可积的函数 f, 存在一列 2π 周期连续函数 f_n, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=0.$$

这其实就是由 Littlewood 三原则里的第三个保证的, 我们把关于这个结论的严格讨论留给实分析. 大家可以自行根据目前所学, 试对 Riemann 可积函数以及反常积分平方可积函数说明这一点. 为求完整, 我们将 Parseval 等式的完整结果叙述如下:

定理 0.7.3. *设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Lebesgue 平方可积, 则*

$$\|f\|_2^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^2.$$

Riemann 可积函数与反常积分平方可积函数均是 Lebesgue 平方可积的.

16. 以 Parseval 等式为基础, Fourier 系数可以描述函数性状. 例如, 若函数连续可微, 则

$$f'\sim\sum_{-\infty}^{\infty}in\hat{f}(n)e^{inx},$$

即 $\hat{f}'(n)=in\hat{f}(n)$. 于是由 Parseval 公式, 可知

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}'(n)|^2=\sum_{-\infty}^{\infty}|n\hat{f}(n)|^2.$$

因此至少, 要有 $|\hat{f}(n)|=o(\frac{1}{n})$.

17. 关于内积, 有一个极化恒等式:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}(\|f+g\|_2^2-\|f-g\|_2^2+i\|f+ig\|_2^2-i\|f-ig\|_2^2),$$

若 f, g 均为实函数, 则极化恒等式就是所谓内积的平行四边形法则:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}(\|f+g\|_2^2-\|f-g\|_2^2).$$

我们要强调, 这个公式本身与分析无关, 它完全是线性代数.

18. 极化恒等式在研究与内积有关的问题时好用得令人惊讶. 利用 Parseval 等式和极化恒等式, 可以推得, 对 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积函数 f,g, 我们有
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}x = \langle f,g\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)},$$
这不意外, 毕竟 $\{e^{inx}\}$ 是正规正交系.

19. 而利用
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}t = \sum_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)},$$
我们可以证明 Fourier 级数的逐项可积性:

定理 0.7.4. *假设函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 其 Fourier 级数为 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$, 则不论这个级数收敛与否, 一定有*
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_n \int_0^x \hat{f}(n)e^{int}\,\mathrm{d}t, \forall x\in[-\pi,\pi].$$

这其实并不令人意外. 你可以利用 Geogebra 画一些函数及其 Fourier 级数前几项的图像, 就可以看到 Fourier 级数图像是忽高忽低缠绕在函数图像附近的, 因而平均值收敛于函数的平均值.

20. 由此定理可以看出, 收敛的三角级数
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\ \text{或}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_n e^{inx}$$
未必是某个可积函数的 Fourier 级数. 例如在 $[0,\pi]$ 上求积分, 即可得

例 0.7.1. 设
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos x+b_n\sin nx$$
是某 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积函数的 Fourier 级数. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛. 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 不是 Riemann 可积函数的 Fourier 级数.

21. Fourier 级数的逐项可积性证明如下:

证明. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, $x\in[-\pi,\pi]$.

a. 则对任意 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数 g, 我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}\,\mathrm{d}x=\sum_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(n)\overline{g(t)}e^{int}\,\mathrm{d}t.$$

b. 于是只需令

$$g(t)=\begin{cases}1 & t\in[0,x]\\ 0 & t\notin[0,x]\end{cases}$$

即可得到

$$\int_0^x f\,\mathrm{d}t=\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_0^x\hat{f}(n)e^{int}\,\mathrm{d}t.$$

□

Fourier 变换

首先要回答两个问题: 什么是 Fourier 变换, 以及为什么要 Fourier 变换.

Fourier 变换就好像是要从另一个角度去看函数. 一般而言, 函数都是指自变量和变量之间的对应关系. 可是, 函数还可以看成一种波动: 函数图像忽高忽低, 一波未平一波又起. Fourier 变换要从这个角度看待函数. 在学习 Fourier 级数时, 我们已经见识过了: 周期波动可以写成三角函数—最简单的波动—的线性组合. 而对于一般函数, 它的组成部分就不仅是频率为 n 的规则波动, 而是包含任意频率的规则波动. 如果有一天, 你突然化身为一个函数, 那么你就能感受到你内心交织的无数规则波动, 感受到它们如何组成了当下的你. 这个视角, 就是 Fourier 变换. 在这个视角下, 原本复杂的函数或者函数之间的运算, 可能一下子就清晰了. 那原本清晰的怎么办? 没关系, Fourier 变换是可逆的.

本节浅尝辄止, 仅初步介绍 Fourier 变换的定义与性质, 并证明两个重要等式.

0.8 Fourier 变换的定义

首先初步引入 Fourier 变换的概念.

1. 对 $[-\pi,\pi]$ 上 2π 周期连续函数 f, 我们有其 Fourier 级数如下:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}xe^{int}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-2\pi i\frac{n}{2\pi}x}\,\mathrm{d}xe^{int}.$$

此时可以把 Fourier 级数看成是如下定义域为点列的函数:

$$\begin{aligned}\hat{f}:\{\frac{n}{2\pi}\} &\to \mathbb{R}\\ \hat{f}(\frac{n}{2\pi}) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-2\pi i\frac{n}{2\pi}x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2. 对于 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 上 T 周期的连续函数呢? 回顾 Fourier 级数的原则: 2π 周期正规正交基线性组合, 我们可以给出一般周期连续函数的 Fourier 变换如下:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,\mathrm{d}xe^{in\frac{2\pi}{T}x},$$

即此时函数 f 可以看成是如下定义域为点列的函数:

$$\begin{aligned}\hat{f}:\{\frac{n}{T}\} &\to \mathbb{R}\\ \hat{f}(\frac{n}{T}) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-2\pi i\frac{n}{T}x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3. 那对于一般的 $\mathbb{R}$ 上函数呢? 一般函数可以看成 $\chi([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])f$ 在 T 趋于 $+\infty$ 的极限, 其中 $\chi([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])$ 为 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 上恒为 1, 其他位置恒为 0 的函数. 而每一个 $\chi([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}])f$ 都可以扩充为一个 T 周期函数.

4. 于是, 当 T 趋于无穷时, $\frac{n}{T}$ 将几乎取遍所有值. 因此, 对 $\mathbb{R}$ 上函数, 不妨直接考虑函数

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

这就是 Fourier 变换. 当然, 这远远不是严格定义.

5. 要想严格定义 Fourier 变换, 首先要可积. 目前, 我们仅考虑满足如下条件的无穷次可导函数. 从此之后, 我们将考虑复值函数. 这在某种程度上市 Fourier 变换的必然要求.

定义 0.8.1. *设 f 无穷次可导, 且*

$$\lim_{x\to\infty}|x|^n|f^{(l)}(x)|=0,\forall n,l\in\mathbb{N},$$

则称其为速降函数. 记全体速降函数构成的集合为 $\mathcal{S}$.

函数 e^{-x^2} 就是一种重要的速降函数.

6. 速降函数的任意阶导数在趋于无穷时, 都非常快速地趋于 0, 以至于比任意 $|x|^n$ 趋于无穷的速度都快. 很容易证明, 函数 f 是速降函数, 当且仅当

$$|x|^n |f^{(l)}(x)| < +\infty, \forall n, l \in \mathbb{N}.$$

7. Fourier 变换就是对这一类函数定义的.

定义 0.8.2. *设 $f \in \mathcal{S}$, 则定义其 Fourier 变换为*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, \mathrm{d}x.$$

若 f 是速降函数, 则 $\hat{f}$ 也是速降函数. 后面我们会讨论这一点.

0.9 平移, 倍增与求导和卷积

接下来我们介绍一些 Fourier 变换的简单性质. 在理论和应用中, 尤其是在偏微分方程等学科中, 这些性质至关重要.

1. 以下几条性质都是实际应用中至关紧要的性质, 它们足以说明 Fourier 变换的重要:

定理 0.9.1. *设 $f \in \mathcal{S}$. 在 Fourier 变换 $F : f \to \hat{f}$ 下, 我们有*

- $F : af + bg \to a\hat{f} + b\hat{g}$
- $F : f(x+h) \to \hat{f}(\xi) e^{2\pi i h \xi}, h \in \mathbb{R}.$
- $F : f(x) e^{-2\pi i h x} \to \hat{f}(\xi + h), h \in \mathbb{R}.$
- $F : f(ax) \to \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{1}{a}\xi), a > 0.$
- $F : \frac{1}{a} f(\frac{x}{a}) \to \hat{f}(a\xi), a > 0.$
- $F : f'(x) \to 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$
- $F : -2\pi i x f(x) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \hat{f}(\xi).$

这几条性质的证明都非常简单, 直接利用含参变量反常积分相关性质, 最多加上一些分部积分公式即可. 请大家自行证明.

2. 这个定理说明了, 在 Fourier 变换下, 一些运算变为另外一些运算, 特别的, 求导变为乘自变量, 乘自变量变为求导. 这两条性质直接保证了, $\hat{f}(\xi)$ 依然是速降函数. 事实上, 由于 f 速降, 其各阶导数均速降, 于是

$$|(2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(x) e^{-2\pi i \xi x} \, \mathrm{d}x| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(n)}(x)| \, \mathrm{d}x.$$

3. 卷积是非常重要的分析工具. 我们将要说明, 在 Fourier 变换下, 卷积是与乘积对称的运算.

   定义 0.9.1 (卷积)**.** *设 $f, g \in \mathcal{S}$, 则定义其卷积为如下函数*

   $$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

   可以验证 $f * g \in \mathcal{S}$.

   由简单变量替换, 可知 $f * g = g * f$.

4. 既然 $f*g$ 还是速降函数, 那么就可以对它做 Fourier 变换. 不仅如此, 卷积和乘积这一对运算, 在 Fourier 变换下恰好是对称的: $\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. 只要利用含参变量反常积分性质, 即可直接得到.

5. 事实上:

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u)e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u)e^{-2\pi i(x-u)\xi}e^{-2\pi i u\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-2\pi i u\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)e^{-2\pi i(x-u)\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

6. 下面要介绍卷积的渐进单位元. 对我们而言这并不是新概念, 毕竟我们介绍过周期卷积渐进单位元.

   定义 0.9.2. *设 $t \in (0, +\infty)$, 称 $\mathbb{R}$ 上速降函数族 $\{\alpha_t(x)\}$ 为 $t \to 0^+$ 时的渐进单位元, 若*

   - $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_t(x)\,\mathrm{d}x = 1, \forall t,$
   - $\exists M, s.t. \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_t(x)|\,\mathrm{d}x < M, \forall t,$
   - $\forall \delta > 0,\ \lim\limits_{t\to 0^+} \int_{|x|\geq\delta} |\alpha_t(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$

7. 上述定义与之前的渐进单位元绝无不同, 下述定理的证明也绝无新事:

   定理 0.9.2. *若 $f \in \mathcal{S}$, 且 $\{\alpha_t\}$ 为 $t \to 0^+$ 时的渐进单位, 则当 $t \to 0$ 时, $f * \alpha_t(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.*

证明请大家自行完成. 这个定理就是称 $\{\alpha_t\}$ 为渐进单位的原因.

8. 这个渐进单位元其实指的是卷积意义下的渐进单位元. 速降函数乘法当然也可以有渐进单位元, 即一族 $\beta_t \in \mathcal{S}$, 其 $t \to 0$ 时, β_t 内闭一致收敛于恒等于 1 的常值函数. 可以想象, 对任意 $f \in \mathcal{S}$, $f\beta_t$ 都在 $t \to 0$ 时内闭一致收敛于 f 本身. 你当然不能指望让 β_t 恒为常值函数 1, 因为这个函数不在 $\mathcal{S}$ 中.

9. 在 Fourier 变换下, 卷积渐进单位元恰好和乘法渐进单位元是互相对应的. 利用速降函数 $f(x) = e^{-\pi x^2}$ 可具体说明这一点. 要做的是计算 $e^{-\pi x^2}$ 的 Fourier 变换, 注意
$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$
而后对 $\hat{f}(\xi)$ 求导可见
$$\hat{f}'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}(-2\pi i x)e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

10. 但是又有
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}(-2\pi i x)e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x = i\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\pi x^2})' e^{-2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}x = -2\pi\xi\hat{f}(\xi),$$
即
$$\hat{f}'(\xi) = -2\pi\xi\hat{f}(\xi),$$
也即
$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}e^{C}.$$
而由 $\hat{f}(0) = 1$, 可见 $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

11. 也就是说, $e^{-\pi x^2}$ 的 Fourier 变换是它自身. 令 $K_\delta(x) = \delta^{-\frac{1}{2}}e^{-\pi x^2/\delta}$, 则直接验算可知, K_δ 在 $\delta \to 0$ 时是一族卷积渐进单位. 另外, 由 Fourier 变换性质可知, K_δ 其实是 $e^{-\delta\pi x^2}$ 的 Fourier 变换. 以下记函数 $e^{-\delta\pi x^2}$ 为 G_δ. 很明显, $\delta \to 0$ 时 G_δ 是函数乘积的渐进单位.

12. 之所以要考虑渐进单位元, 是因为无论对卷积还是乘积, $\mathcal{S}$ 中都不存在真正的单位元. 然而, 以后大家可能会学习广义的卷积和 Fourier 变换, 在那里, 我们要考虑的函数远远多于速降函数. 那时, 卷积的真正单位元其实是 Dirac 函数, 乘法的真正单位元就是常值为 1 的函数. 而在广义的 Fourier 变换下, 它们又恰好是互相对应的.

13. 所谓 Dirac 函数, 是指在 0 处取值为 $+\infty$, 在其他点处取值为 0 的 "函数", 一般记为 δ. 这当然不是一个函数, 而是一个从速降函数到数的线性映射, 也就是一个泛函, 其定义为

$$\delta(f) = f(0) = \text{``}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta \,\mathrm{d}x\text{''}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

于是 $\delta * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\delta \,\mathrm{d}y = f(x)$, 即 $f(x-y)$ 在 $y=0$ 时候的值. 目前而言, $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta \,\mathrm{d}x$ 肯定是不合法的, 但合情合理, 而且有助于我们理解后续关于 Fourier 变换的内容. 这种有用, 合情合理的东西, 迟早要被合法化. 合法化它的理论就是广义函数理论.

14. 而在广义的 Fourier 变换下, 其实有 $\hat{1} = \delta$. 我们可以解释这个等式:

$$\hat{1}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-2\pi i x\xi} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi x\xi) + i\sin(2\pi x\xi) \,\mathrm{d}x,$$

可见只要 ξ 不是 0, 积分就 "因为三角函数的周期性而为 0," 而 $\xi = 0$ 时, 积分就 "等于 $\int_{-\infty}^{\infty} 1 \,\mathrm{d}x = +\infty$." 切记切记, 我们的解释几乎违反了数学分析中的一切法律.

0.10 Fourier 逆变换

既然 $\hat{f}(\xi)$ 依然是速降函数, 那么 Fourier 变换就是从速降函数到速降函数的映射, 而且很明显, 是**线性映射**. 更进一步, 这一映射是一一映射. 接下来我们就证明这件事情.

1. 首先定义 Fourier 逆变换如下:

定义 0.10.1. *对 $f \in \mathcal{S}$, 其 Fourier 逆变换 $\check{f}$ 就定义为*

$$\check{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi i x\xi} \,\mathrm{d}x.$$

2. 之所以称之为逆变换, 是因为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi} \,\mathrm{d}\xi.$$

根据上一节关于渐进单位元的内容, 证明这个等式非常容易:

a. 首先注意到若 $f, g \in \mathcal{S}$, 则直接由我们学过的关于反常积分换序的基本结论即可得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x) \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)g(y) \,\mathrm{d}y.$$

b. 接下来要证明 $\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=f(0)$. 利用渐进单位 K_δ, 有

$$f(0)=\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K_\delta(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\hat{G}_\delta(x)\,\mathrm{d}x,$$

而明显的,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\hat{G}_\delta(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)G_\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

c. 最后, 考虑 $F(y)=f(x+y)$, 则可得

$$f(x)=F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{F}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

证毕.

3. 这个关于 Fourier 逆变换的证明虽然很优雅, 但是你可能会怀疑, 应该没有人能凭空想出这一切. 毕竟, 在 Fourier 变换下函数 $e^{-\pi x^2}$ 是不动点这个事很难发现, 若人们已经了解了这一点, 应该已经知道了 Fourier 变换的逆是谁了. 也就是说, 你其实怀疑, 关于 Fourier 变换有逆变换, 以及对逆变换的构造, 应该有一个自然的, 根植于过往学习经验的线索. 事实也确实如此.

4. 设 f 为 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 上无穷次可导函数, $f(-\frac{T}{2})=f(\frac{T}{2})=0$. 考虑 f 的 Fourier 级数,

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-2\pi i\frac{n}{T}x}\,\mathrm{d}xe^{2\pi i\frac{n}{T}x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\frac{n}{T})e^{2\pi i\frac{n}{T}x}\frac{1}{T},$$

右边似是一个 Riemann 和. 在 T 趋于 $+\infty$, 时, “应该” 有 Riemann 和收敛, 且其极限就 “应该” 是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi,$$

即 “应该” 有

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

5. 如果你觉得可以接受 Delta 函数, 那么 Fourier 逆变换公式的解释就更加

自然了:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi iy\xi}\,\mathrm{d}y e^{2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(y-x)\xi}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y+x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iy\xi}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y+x)\delta\,\mathrm{d}y \\ &= f(x).\end{aligned}$$

当然, 这段运算中的每一个等号都应该加上引号.

6. 如果你想验证自己是否理解了— 不是说要会证明 — Fourier 变换的逆变换, 不妨试试搜索 Gabor 变换, 一种加窗 Fourier 变换, 看看你能否理解其逆变换的形式.

0.11 Plancherel 等式, Poisson 求和公式, 与测不准原理

本小节介绍三个关于 Fourier 变换的重要等式和不等式: Plancherel 等式, Poisson 求和公式以及测不准原理. Plancherel 等式表明 Fourier 变换其实是等距变换, Poisson 求和公式是一个整齐优美非常有用的公式, 测不准原理则是 Fourier 变换理论对量子力学中的测不准原理的刻画.

1. Plancherel 等式:

定理 0.11.1. *设 $f \in \mathcal{S}$, 则*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

即 $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. 这说明在速降函数空间上, Fourier 变换是等距变换.

2. 证明很简单:

证明. a. 考虑 $h = f * f$, 于是 $h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$

b. 同时, $\hat{h}(\xi) = \hat{f}^2(\xi)$.

c. 但已知

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

得证. □

3. Poisson 求和公式:

定理 0.11.2. *设 $f \in \mathcal{S}$, 必有*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

4. 函数的速降性质保证了 Poisson 求和公式左边的级数一致收敛, 定义了一个以 1 为周期的连续函数—这一定义方式也称周期化. 同样道理, 右边也一致收敛到以 1 为周期的连续函数. 于是要验证这个等式, 就是要验证它们有同样的 Fourier 系数, 因为连续周期函数的 Fourier 系数完全决定了函数自身. 注意, 此时我们考虑的是 1 周期的 Fourier 级数.

5. 于是只需对任意 $m \in \mathbb{Z}$, 直接计算 Poisson 求和公式左边 Fourier 系数即可:

证明.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)\Big) e^{-2\pi i m x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi i m x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i m x}\,\mathrm{d}x \\
&= \hat{f}(m).
\end{aligned}$$

□

6. 量子力学中, 不会说一个微观粒子具体落在怎样的位置, 而是会说这个粒子落在各处的概率. 假设空间是一维空间, 可以设其落在 x 处的概率是 $|\phi|^2(x)$, 那么 $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi|^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 而且一般而言, 粒子落在无穷远处的概率非常小, 因此我们可以假设, $\phi(x)$ 是速降函数.

7. 那么 $\int_{-\infty}^{\infty} x|\phi|^2(x)\,\mathrm{d}x$ 就是关于粒子位置的期望. 假设期望为 x_0, 那么积分 $\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2|\phi|^2(x)\,\mathrm{d}x$ 就是粒子位置的方差. 关于位置的方差刻画了位置的不确定性: 如果概率集中在 x_0 附近, 方差就会很小.

8. 在量子学中, 如果粒子位置概率函数为 $|\phi|^2(x)$, 那么量子动量的概率就是 $|\hat{\phi}|^2(\xi)$, 而官运动量的不确定性就体现为积分 $\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\xi_0)^2|\hat{\phi}|^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, 其中 ξ_0 为动量的期望.

9. 于是我们有如下测不准原理:

   定理 0.11.3. *设 $\phi(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x=1$, 则我们有*
   $$\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2|\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\xi_0)^2|\hat{\phi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\geq\frac{1}{16\pi^2}.$$

   这个定理就说明了, 关于位置和动量的测量, 不可能同时很精确.

10. 事实上, 我们只需对 $x_0=0,\xi_0=0$ 的情况证明这个定理即可.

    证明. a. 由分部积分公式, 我们有
    $$1=\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{\infty}x(\bar{\phi}(x)\phi'(x)+\phi(x)\bar{\phi}'(x))\,\mathrm{d}x$$
    因而有
    $$1\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}|x||\bar{\phi}(x)||\phi'(x)|\,\mathrm{d}x.$$
    b. 因而由 Hölder 不等式, 我们有
    $$1\leq 2\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}x^2|\phi(x)|^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|\phi'(x)|^2\,\mathrm{d}x}$$
    c. 注意 $\hat{\phi}'(\xi)=2\pi i\xi\hat{\phi}(\xi)$, 因而由 Plancherel 等式, 我们有
    $$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi'(x)|^2\,\mathrm{d}x=4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\hat{\phi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.$$
    得证. □

0.12 离散 Fourier 变换与 FFT

为了在现实中应用 Fourier 变换解决问题, 人们想到了离散 Fourier 变换. 这个想法非常精彩, 但是如果没有 FFT, 即快速 Fourier 变换 (Fast Fourier transformation), 对其的应用只能是纸上谈兵.

1. 假设你想用微信, 告诉远方的一个人, 说你手里有一个怎样的速降函数. 但你不能发图片, 不能发文字, 只能发数字. 这意味着, 你没有办法告诉对方, 在任意实数 x 处, 你的函数取值多少了.

2. 这个问题可不是我们瞎掰的, 许多事物本质上就是一个函数, 一张图片, 一段音频, 叶文洁向三体世界发送的信号, 三体世界回复的不要回答, 本质上都是函数. 不能告诉对方每一点处的函数值, 意味着不能把全部细节告诉对方—你本来也不该如此幻想, 对方也不需要.

3. 你只需要告诉对方有限个点处的函数值, 只要点足够多, 分布得足够均匀, 对方就能大概看出你的函数了. 例如在 $[-1000, 1000]$ 的区间上, 均匀地挑出 10000 个点, 告诉对方你的函数在这些点处的函数值, 足以清晰表达你的意思了. 但这样做有两个问题: 一, 万一某些点处的信息在传输过程中丢掉了, 则对方很有可能彻底误解你的意思; 二, 如果传输过程中, 有噪音对每一个点的函数值都施加了一点点很小的影响, 那 10000 个微小的影响, 也足以让对方误解你的意思. 所谓噪音, 本就不是集中在某一个位置上, 而是集中在某一个较高的频率上, 反复出现在所有位置. 总而言之, 我们可能面临两种失真: 一种是某一个位置上的巨大失真, 一种是每一个位置上都稍稍有一点, 然后加起来很大的失真.

4. 很幸运, 有一个想法可以同时解决这两个问题: 把这 10000 个点处, 每一点处的信息都按照频率分成 10000 份, 然后将相同频率的片段组合到一起, 重组出新的 10000 份信息. 这样新的 10000 份信息里, 每一份都包含原本 10000 个点里每一点处的 10000 分之一的信息, 这样就没有任何一点处的信息会完全丢失了; 同时原本隐藏在 10000 个点每一点处的噪音, 可能被集中到新 10000 份信息的某一份中去, 你就可以放心删掉它了.

5. 不妨想象一个场景, 你和三个朋友点了四个串, 分别是羊肉串, 牛肉串, 板筋和肉皮, 每串四块肉. 你们每个人都想尝到每种口味, 同时每一串的第三个都糊了, 因为烤箱的问题. 那怎么才能解决这两个问题呢? 答案很简单, 横着串, 这样每一串都有四种口味, 而且你可以扔掉第三串, 因为这一串上的四块肉都糊了.

6. 如果你明白了这个想法, 你就应该能想到, 这其实就是 Fourier 变换—只不过你需要一种离散的 Fourier 变换. 假设对一个速降函数 X 你挑出 N 个点处函数值
$$X(0), X(1), \cdots, X(N-1),$$

则可以考虑如下离散 Fourier 变换

$$\hat{X}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}X(n)e^{-2\pi i\frac{nm}{N}}, m=0,1,\cdots,N-1.$$

很明显, 这是对 Fourier 变换非常自然且合理的模仿. 你可以看到, 任何 $m=0,1,\cdots,N-1$, $\hat{X}(m)$, 都包含每一个 $X(n)$ 中频率为 $\frac{m}{N}$ 的那一部分信息.

7. 用矩阵形式看离散 Fourier 变换, 更有助于我们理解它—矩阵本来就是要用于数据化抽象对象的—

$$\hat{\boldsymbol{X}}=F_N\boldsymbol{X}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 为 N 维列向量 $(\hat{X}(0),\hat{X}(1),\cdots,\hat{X}(N-1))^T$, $\boldsymbol{X}$ 为 N 维列向量 $(X(0),X(1),\cdots,X(N-1))^T$, 而 F_N 为 $N\times N$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & e^{-2\pi i\frac{1}{N}} & e^{-2\pi i\frac{2}{N}} & \cdots & e^{-2\pi i\frac{N-1}{N}}\\ 1 & e^{-2\pi i\frac{2}{N}} & e^{-2\pi i\frac{4}{N}} & \cdots & e^{-2\pi i\frac{2(N-1)}{N}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & e^{-2\pi i\frac{N-1}{N}} & e^{-2\pi i\frac{(N-1)2}{N}} & \cdots & e^{-2\pi i\frac{(N-1)(N-1)}{N}}\end{pmatrix}.$$

8. 关于 Fourier 变换最重要的事情, 是其有 Fourier 逆变换. 离散 Fourier 变换, 也有逆变换, 直接计算 (或者画图) 可见:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nm}{N}}e^{2\pi i\frac{nk}{N}}=1$$

若 $m=k$. 同时若 $m\neq k$, 则

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nm}{N}}e^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{n(k-m)}{N}}=0,$$

这是因为若 $k\neq m$, 则

$$e^{2\pi i\frac{k-m}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{n(k-m)}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{n(k-m)}{N}}.$$

9. 也就是说, 矩阵 F_N 的逆矩阵恰为 $\frac{1}{N}F_N^*$. 注意, F_N^* 指的是 F_N 的共轭转置—矩阵中每项取共轭, 再对矩阵转置. 这意味着, 如果你将 $\hat{X}(m), m=0,1,\cdots,N-1$, 对方可以根据如下离散的 Fourier 逆变换还原原本函数值:

$$X(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\hat{X}(m)e^{2\pi i\frac{nm}{N}}, n=0,1,\cdots,N-1.$$

10. 不仅如此, 由 $(\frac{1}{\sqrt{N}}F_N^*)\frac{1}{\sqrt{N}}F_N = I$, 可见 F_N 保持向量之间的夹角, 同时把每个向量均拉长 $\sqrt{N}$ 倍, 这意味着离散 Fourier 变换并没有显著改变不同组数据之间的相互关系, 即不会影响我们对数据的理解.

11. 然而想在实际中应用上述想法, 还是有相当困难的: 假设你要传递的信息为 N 个函数值, 那么你不得不考虑 $N \times N$ 矩阵乘以 N 维向量, 这意味着 N^2 次乘法和 $N(N-1)$ 次加法. 当 N 变大时, 计算量将以 N^2 同阶无穷大的方式增长, 对于计算机而言, 这是一场灾难. 直到人们发现快速 Fourier 变换, 即 FFT, 离散 Fourier 变换的应用才成为现实.

12. 所谓 FFT, 是指在 $N = 2K$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\hat{X}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{K-1} X(2n)e^{-2\pi i \frac{m(2n)}{N}} + \sum_{n=0}^{K-1} X(2n+1)e^{-2\pi i \frac{m(2n+1)}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{K-1} X(2n)e^{-2\pi i \frac{m(2n)}{N}} + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{n=0}^{K-1} X(2n+1)e^{-2\pi i \frac{m(2n)}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{K-1} X(2n)e^{-2\pi i \frac{mn}{K}} + e^{-2\pi i \frac{m}{N}} \sum_{n=0}^{K-1} X(2n+1)e^{-2\pi i \frac{mn}{K}}.
\end{aligned}$$

注意 $m \geq K$ 时, 我们有 $e^{-2\pi i \frac{m}{N}} = e^{-2\pi i \frac{K}{N}} e^{-2\pi i \frac{m-K}{N}} = -e^{-2\pi i \frac{m-K}{N}}$.

13. 也就是说, 若 $N = 2K$, 将向量

$$\boldsymbol{X} = (X(0), X(1), \cdots, X(N-1))^T$$

按照下标为偶数和奇数重新写为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{even} \\ \boldsymbol{X}_{odd} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{X}_{even} = (X(0), X(2), \cdots, X(N-2))^T, \boldsymbol{X}_{odd} = (X(1), X(3), \cdots, X(N-1))^T.$$

则恰有

$$\hat{\boldsymbol{X}} = F_N \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} I_K & D_K \\ I_K & -D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_K & 0 \\ 0 & F_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{even} \\ \boldsymbol{X}_{odd} \end{pmatrix},$$

这里 I_K 为 $K \times K$ 的单位矩阵, 而 D_K 为 $K \times K$ 对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i \frac{1}{N}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\pi i \frac{2}{N}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{-2\pi i \frac{K-1}{N}} \end{pmatrix}.$$

14. 这样, 只要将偶数位置和奇数位置数据重整为两组数据, 我们就只需要不多于

$$2(K^2 + K(K-1)) + 8K$$

次运算即可算出离散 Fourier 变换. 如果 $N = 2^k$, 则我们可以不断重复上述过程, 以至于计算量将减少为 $4Nk = 4N \ln N$ 次以内. 试试上, 设 $\sharp F_n$ 为 Fourier 变换的计算次数, 而 $\sharp FF_n$ 为重整之后的变换所需计算次数, 则

$$\sharp FF_{2^k} \le 2(\sharp FF_{2^{k-1}}) + 8 \cdot 2^{k-1} \le 4\sharp FF_{2^{k-2}} + 2 \cdot 8 \cdot 2^{k-1} \le \cdots \le 8k2^{k-1}.$$

15. 若 $N \neq 2^k$ 也没有关系, 我们只需补上 $2^k - N$ 个 0 即可! 补充上 0 将不会增加任何计算负担, 因此对一般的 N, 计算离散 Fourier 变换的运算量基本上还是 $N \ln N$ 的同阶无穷大. 而我们知道, 当 N 很大时, $N \ln N$ 将远远小于 N^2. 这就是 FFT, 它使得计算离散 Fourier 变换成为可能. 因此在实际中, Fourier 变换的应用, 基本上就是 FFT 的应用. FFT 是如此常用, 以至于在 Python 中, 要想使用 FFT, 只需要

```
from scipy.fft import fft
```