

《常微分方程》教学大纲

(2025—2026 年第一学期)

课程：常微分方程
课程序号：0409
课程代码：105302

授课教师：张晓梅
答疑时间：微信群或周二下午(预约)
办公室：红瓦楼 821 室
E-mail: zxm_72@mail.shufe.edu.cn

课程类别：通识模块四

课程安排说明：2025 年 9 月 10 日—2025 年 11 月 28 日
上课时间：周三上午 10: 05-11: 45, 周五下午 15: 25-17: 05
授课地点：二教 110
课程调整：无
期终考试时间：2025 年 12 月 1 日—12 月 30 日之间

教学学时分配表

学分	总学时	理论教学学时	实践教学学时	实验教学学时	其他
3	48	48	0	0	0

课件网址：<https://canvas.shufe.edu.cn/courses/35048>

教材和参考书目：

指定教材：《常微分方程》(第二版)张晓梅, 张振宇, 张立柱主编, 复旦大学出版社, 2016 年 6 月; 《常微分方程学习指导与习题解答》张晓梅, 张振宇, 张立柱主编, 复旦大学出版社, 2016 年 6 月。

参考书目：

《常微分方程习题解》庄万主编, 山东科学技术出版社, 2003 年 9 月

预备知识

数学分析, 高等代数

先修课程：《数学分析》，《高等代数》

课程达成目标：

从数学发展史看, 微分方程不仅是分析数学联系实际问题的桥梁, 而且是体现分析数学的众多重要思想的窗口。微分方程研究的主要内容是如何求解微分方程和解的适定性问题(各种属性), 它是分析数学系列课程以及数学专业与应用数学专业其他后继课程的重要

基础。通过该课程的学习，一方面使学生理解常微分方程的基本概念，掌握常微分方程的基本理论和各种基本微分方程的求解方法，为后继课程打下扎实的基础；另一方面使学生对如何建立微分方程模型去解决实际问题，尤其是经济、金融等领域中的问题有深刻的认识。因此，在该课程的学习中，应着重培养学生的理论分析能力、计算推导能力、分析比较能力等，培养利用所学知识解决实际问题的能力。

在本课程的教学可穿插思政内容，将马克思主义基本原理应用于教学实践，可以培养学生正确的思想道德观，帮助学生更深入地思考问题的本质和背后的意义，树立正确的人生观和价值观。例如，在初等积分法的学习中，可以引导学生更加深刻地理解事物的发展总是由低级到高级、由简单到复杂的唯物辩证法的发展观；在解的适定性理论的学习中，通过介绍多位数学家所作出的不懈努力，启发学生遇到困难和挫折时不要轻易放弃，培养学生的坚韧意志和毅力；在一阶线性微分方程组的学习中，可穿插个人与集体的关系的思政元素，培养学生的集体主义精神和团队合作意识；等等。

课程设置知识要求：

通过本课程的学习，要使学生获得：1、初等积分法求解一阶微分方程的思路与方法，包括分离变量法、变量替换法、常数变易法、积分因子法和参数法等；2、一阶方程初值问题解的存在唯一性定理的内容、证明方法和思路，并初步了解解的延拓定理、解对初值的连续依赖性和可微性定理等基本理论。这部分内容是一个难点，需要学生反复思考和体会。3、高阶线性方程的解的结构和性质；4、常系数高阶线性方程的求解方法；5、一阶线性方程组的解的结构与性质；6、常系数一阶方程组的求解方法。为今后学习相关后继课程和进一步获取数学知识和经济数学等方面技能奠定必要的理论和方法基础。

课程设置能力要求：

课程授课方式是板书与PPT讲解相结合。通过讲解各种微分方程、方程组的求解思路与方法，介绍常微分方程中最基本的理论和方法，引导和训练学生灵活处理各种方程问题。

授课过程中通过一些经济、社会、金融领域中的应用实例的讲解，加强学生应用意识的培养，提高学生解决实际问题的能力。

存在唯一性定理是常微分方程中最基本的理论，对逐步逼近法的思路进行剖析、逻辑推理、内涵阐述及知识拓展，为有兴趣的学生提供进一步学习的线索，也给有能力的学生提供发挥学习潜能的空间。组织学生通过小组讨论的方式，运用存在唯一性定理研究特殊方程的解存在与唯一性，培养和锻炼学生团队合作的精神。

同学们最好在课前进行预习，课堂上老师将着重于如何解决问题。如果同学们事先阅读了相关章节，这将有助于同学们理解讲课的内容。

考核形式：

期末考试采用**闭卷**方式，学生的最后的总分计算方法如下：

课后作业、随堂测验、出勤	30%
期末考试	70%

试卷结构：

填空题	20%
选择题	10%
计算题	40%

综合题	10%
证明题	20%

学术诚实

涉及学生的学术不诚实问题主要包括考试作弊；抄袭；伪造或不当使用在校学习成绩；未经老师允许获取、利用考试材料。对于学术不诚实的最低惩罚是考试给予 0 分。其它的惩罚包括报告学校相关部门并按照有关规定进行处理。

常微分方程课程教学要点

教学大纲

第一章 绪论

§ 1.1 微分方程模型

§ 1.2 常微分方程的基本概念

本章教学重难点：

1. 重点掌握常微分方程的基本概念。
2. 本章的难点是对微分方程的解、通解、特解的理解。

课程思政元素：

阐述微分方程这门学科的发展过程时，可以介绍很多有代表性的科学家，如柯西、欧拉、刘维尔、伯努利、黎卡提、李雅普诺夫等，适时引入科学家故事，让学生了解科学家的事迹及取得的成就。教育学生学习科学家精神，热爱科学研究。

第二章 初等积分法

§ 2.1 分离变量法

§ 2.2 变量替换法

1. 齐次方程
2. 可化为齐次的方程
3. 两个常见类型方程的替换法
4. 一阶线性方程
5. Bernoulli 方程

§ 2.3 积分因子法

1. 全微分方程的定义与判别方法
2. 全微分方程的求解
3. 积分因子

§ 2.4 参数法

1. 可解出 y 或 x 的隐式方程
2. 不显含 y 或 x 的隐式方程

§ 2.5 应用实例

本章教学重难点：

1. 重点掌握分离变量法、变量替换法、积分因子法。重点掌握一元积分因子的求解方法。
2. 重点掌握一阶线性方程的求解，掌握常数变易法的思想和方法。
3. 本章的难点是求解一阶隐式方程的参数法。能求解的一阶隐式方程很少，需要根据方程本身的特点进行分析，需要很多经验和技巧。

课程思政元素：

1. 常数变易法是求解一阶线性非齐次方程特解的一种方法。借助于对应齐次方程通解的结构，将其中的任意常数变换成函数来求解，其实蕴含着“先猜想，再证明”的思路。让学生了解科学猜想是一种重要的科学研究方法。它直观、易操作、好理解。给我们探索未知提供了重要思路。鼓励学生大胆猜想，然后证明推测，或逐步找到问题的本质，从中显现出学生的聪明才智，这对学生的能力也是一种肯定，促使学生自然而然地不断追求真理。
2. 通过学习伯努利方程，介绍伯努利家族是 17-18 世纪瑞士的数学家家族，祖孙三代出过十多位数学家和物理学家。最杰出的是丹尼尔伯努利，他解决了微分方程中的黎卡提方程，伯努利方程，他的贡献涉及天文学、力学、磁学等多个方面，曾十次获得法国科学院颁发的奖金。最值得称颂的是丹尼尔伯努利与欧拉的友谊，欧拉曾经是丹尼尔的助手，他们是最亲密的朋友，也是竞争对手。他们通信 40 年，在通信中，丹尼尔向欧拉提供最重要的科学信息，欧拉以杰出的分析才能和丰富的工作经验，向丹尼尔提供最及时的帮助，被誉为“科学通信”。教育学生学习科学家的科学奉献精神，引导学生理解“近朱者赤”的观点，要积极上进，锐力进取。

第三章 定解问题与适定性

§ 3.1 Picard 存在唯一性定理

1. 一阶显式微分方程
2. 一阶隐式微分方程
3. 近似计算与误差估计

§ 3.2 不定点定理与解的存在性

§ 3.3 解的延拓

§ 3.4 解对初值与参数的连续性与可微性

1. Gronwall 不等式
2. 解对初值和参数的连续性
3. 解对初值与参数的连续性可微性

§ 3.5 解的延拓

1. Sturm-Liouville 问题
2. Sturm-Liouville 问题解的性质

本章教学重难点：

1. 重点掌握一阶常微分方程初值问题解的存在唯一定理。
2. 重点掌握 Picard 逐步逼近法的思想和如何构造逐步逼近序列。
3. 本章的难点是存在唯一性定理为什么要在平面一个有界区域上研究；为什么要这样构造逐步逼近序列；为什么在定理条件下解是唯一的。
4. 本章的难点是解的延拓定理的思想，及运用延拓定理求方程解的最大存在区间。

课程思政元素：

1. 对初值问题的逐步逼近法的分析，阐述，让学生理解在保证解存在唯一时，虽然求不出精确解，但可以通过迭代一步一步逼近真正解。是由浅入深的过程。让同学们看到，科学研究就是从简单到复杂不断深入的过程，人生奋斗过程也是如此。掌握这些基本思路和规律，不仅对课程的学习有帮助，也对人生目标的理解和规划有指导意义。

2. 通过设计一组函数序列，一步一步逼近真解的过程，启发学生“心中有目标，奋力前行”，“不怕艰难险阻，坚定信念，越来越接近目标”，宣传中国共产党一百年发展史就是逐步逼近序列的一个代表。不忘初心，砥砺前行，不断向目标靠近，驶向我们所向往的美好明天。

第四章 高阶微分方程

§ 4.1 高阶微分方程的降阶法

1. 形式为 $x^{(n)} = f(t)$ 的高阶方程
2. 不显含未知函数 x 的高阶方程
3. 不显含自变量 t 的高阶方程

§ 4.2 高阶线性微分方程的一般理论

1. 初值问题解的存在唯一性定理
2. 齐次线性方程解空间的结构
3. 非齐次线性方程解集合的性质

§ 4.3 常系数齐次线性方程的待定指数函数法

1. 复值函数与复值解
2. 常系数齐次线性方程的待定指数函数法
3. Euler 方程

§ 4.4 常系数非齐次线性微分方程的待定系数法

§ 4.5 应用实例

本章教学重难点：

1. 重点掌握高阶线性齐次方程的解空间的结构和性质。
2. 重点掌握高阶线性非齐次方程的解集合的性质。
3. 重点掌握刘维尔公式的内涵和运用。
4. 重点掌握常系数齐次线性微分方程的待定指数函数法。
5. 重点掌握常系数非齐次线性微分方程的待定系数法。
6. 本章的难点是高阶微分方程的降阶法。能降阶的高阶方程少之又少，需要根据方程本身的特点进行分析，需要很多经验和技巧。

课程思政元素：

常微分方程中常用的科学研究方法就是变量替换法。它几乎贯穿到整个课程教学之中，教会学生正确理解和应用变量替换思想，可以达到事半功倍的效果。比如高阶线性非齐次方程求特解的常数变易法，常系数线性齐次方程的待定指数函数法，常系数线性非齐次方程的待定系数法等，指导学生在日常生活和工作中遇到困难时，若换一个角度去考虑问题就可能迎刃而解。

第五章 一阶线性微分方程组

§ 5.1 一阶线性微分方程组的一般理论

1. 一阶线性微分方程组的基本概念

2. 一阶线性微分方程组与高阶线性微分方程的关系
3. 一阶线性微分方程组解的存在唯一性定理
4. 一阶齐次线性微分方程组解空间的结构
5. 一阶齐次线性微分方程组的基解矩阵
6. 一阶非齐次线性微分方程组解集合的性质

§ 5.2 一阶常系数线性微分方程组

1. 矩阵指数函数 $\exp(At)$
2. 常系数齐次线性微分方程组的解法
3. 常系数非齐次线性方程组的常数变易法

§ 5.3 应用实例

本章教学重难点:

1. 重点掌握一阶线性齐次方程组解空间的结构和性质，掌握齐次线性方程组的基解矩阵及有关性质。
2. 重点掌握常系数线性齐次方程组的标准基解矩阵，掌握特征根为重根时，一般基解矩阵的求解方法。
3. 本章的难点是一阶线性非齐次方程组的求解。计算过程很复杂，计算量很大。

课程思政元素:

在学习微分方程组时，我们讨论了一个典型案例：2020 年初新冠肺炎疫情席卷全球，请结合传染病模型分析中国武汉新冠肺炎疫情发展演化规律。通过设计这个热点题目，让学生结合课程学习解决身边存在的具体问题。锻炼学生的应用意识和创新能力。让学生深深体会到所学知识能真正用到实际中解决实际问题。也了解到中国人民团结抗疫的感人事迹，更看到了中国共产党的政治决策能力，树立爱党、爱国的坚定信念。

第六章 稳定性理论

§ 6.1 基本问题

§ 6.2 稳定性的线性近似判定

1. 线性方程组的判定
2. 非线性方程组的线性近似判定

§ 6.3 相平面

§ 6.4 Lyapunov 函数判别法

1. 引例
2. 自治系统稳定性的 Lyapunov 判别法

§ 6.5 周期解和极限环

§ 6.6 应用实例

本章教学重难点:

1. 重点掌握线性方程组的判定，非线性方程组的线性近似判定。
2. 重点掌握 Lyapunov 函数判别法。
3. 本章的难点是 Lyapunov 函数判别法。

课程思政元素：

经过庞加莱开创微分方程定性理论，洛伦兹提出混沌效应，使得建立在经典力学上的拉普拉斯的决定论在高维空间中不再适用，预示着自然乃至宇宙世界的变换莫测。从哲学的角度，决定论只适用于一定的范围，而不确定性大量存在于现实世界中。学生在学习的时候，应该注重追求科学真谛，在打好基础上要有怀疑的勇气，要有实事求是的精神。

上海财经大学 2025—2026 学年第一学期教学进度表

数学学院 数学类 专业 2024 级 数学 1 班, 数学 2 班 课程名称《常微分方程》

课程序号 0409 课程代码 105302

总学时 48 本学期安排学时数 48 (其中讲课 46 学时, 课堂练习、讨论 2 学时, 其他 0 学时)

讲课教师 张晓梅 辅导教师 张晓梅

周次	月/ 日~ 月/ 日	讲 课		课堂练习、讨论及课外作业	
		时数	内 容	时数	内 容
1	9月/8日~ 9月/14日	4	第一章 绪论 微分方程模型 常微分方程的基本概念 第二章 初等积分法 分离变量法 齐次方程 可化为齐次的方程		P11 2 P11 3(1-4) P18 1,2,3 P37 1(1-4) P37 1(6-9)
2	9 月 / 15 日~ 9 月/ 21 日	4	一阶线性方程 Bernoulli 方程 全微分方程		P37 1(10-12) P38 1(14-15),3,4(1-4) P53 1(1-4)

周次	月/ 日~月/ 日	讲 课		课堂练习、讨论及课外作业	
		时数	内 容	时数	内 容
3	9 月 /22 日~ 9 月/ 28 日	4	积分因子 特殊积分因子的寻求 参数法 两类隐式方程的求解		P53 3,4 P54 5,6,7 P63 1,2,3
4	9 月 / 29 日~ 10 月 /5 日	4	第三章 一阶常微分方程初值问题解的存在 唯一性 Picard 存在唯一性定理 定理的解释与说明		P78 3,4,5,6
5	10 月 / 6 日~ 10 月 /12 日	4	解的延拓 第四章 高阶微分方程 高阶微分方程的降阶法		P85 1,3,6 P105 1(1-6),3
6	10 月 / 13 日~ 10 月 /19 日	4	齐次线性方程解的结构 非齐次线性方程解的性质 常数变易法		P120 3,4,7 P120 5,6,10
7	10 月 /20 日~ 10 月 /26 日	4	Liouville 公式及应用 常系数齐次线性方程的待定指数函数法 常系数非齐次线性方程的待定系数法		P121 11,12,13 P132 1,2(1-2),3,4 P139 1(1-6),2(1-4)
8	10 月 / 27 日~ 11月/ 2 日	2	欧拉方程 第四章 小结 习题课	2	总结讨论

周次	月/ 日～月/ 日	讲 课		课堂练习、讨论及课外作业	
		时数	内 容	时数	内 容
9	11 月 / 3 日～ 11月/ 9 日	4	第五章 一阶线性微分方程组 一阶线性微分方程组的基本概念 存在唯一性定理 一阶齐次线性微分方程组 解空间的结构 基解矩阵的性质		P166 1,2 P168 10,11,12
10	11 月 / 10 日～ 11月/ 16 日	4	一阶非齐次线性微分方程组解集合的性质 常数变易法 简单方程组的求解 一阶常系数线性微分方程组 矩阵指数函数 $\text{Exp}(At)$		P187 3
11	11 月 / 17 日～ 11月/ 23 日	4	常系数齐次线性微分方程组的解法 若当标准型法、待定系数法、空间分解法 第五章 小结 习题课		P187 4,5,6,7
12	11 月 / 24 日～ 11月/ 30 日	2	第六章 稳定性理论简介 稳定性定义 稳定性的线性近似判断 Lyapunov 函数判别法	2	总结讨论
13					

周次	月/日~月/日	讲 课		课堂练习、讨论及课外作业	
		时数	内 容	时数	内 容
14					
15					
16					

周次	月/日~月/日	期末考核	
		时数	考核方式
			闭卷考试
指定教材和教学参考书		使用的教材： 指定教材：《常微分方程》(第二版)张晓梅，张振宇，张立柱主编，复旦大学出版社，2016 年 6 月；《常微分方程学习指导与习题解答》张晓梅，张振宇，张立柱主编，复旦大学出版社，2016 年 6 月。 参考书： 《常微分方程习题解》庄万主编，山东科学技术出版社，2003 年 9 月	

教研室主任：