第一章 行列式

- 行列式的概念最早是由十七世纪日本数学家关孝和提出来的，他在1683年写了一部叫做《解伏题之法》的著作，标题的意思是“解行列式问题的方法”，书里对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述。
- 欧洲第一个提出行列式概念的是德国的数学家莱布尼茨。德国数学家雅可比于1841年总结并提出了行列式的系统理论。

本章主要介绍下面三个问题:

1. 行列式概念的形成;

2. 它的基本性质及计算方法;

3. 利用它求解线性方程组.

§1.1 二阶和三阶行列式

考察二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

容易用消元法得当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，此方程有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

称此为二阶行列式.

于是上述解可以用二阶行列式叙述为：

当二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，该方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称此为三阶行列式，

三阶行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易用消元法得上述三元线性方程组的解，即当

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,上述三元线性方程组的解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

§1.2 排列

定义1

由n个数$1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个n**阶排列**.

例如：

2431是一个4阶排列，45321是一个5阶排列 .

注 容易证明，n阶排列的总数是

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdots 2\cdot 1.$$

定义2

在一个排列中，如果一对数的前后的位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**.

一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**.

例 2431中，21，43，41，31就是全部的逆序，所以2431的逆序数就是4．而45321的逆序数为9．

定义3

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例 2431是偶排列；45321是奇排列；而$12\cdots n$的逆序数是0，因之是偶排列.

定义4

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列．这样一个变换称为一个**对换**．

例如，经过1，2对换，排列2431就变成了1432，排列2134就变成1234．

注 显然，如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了．由此得知，一个对换把全部 n 阶排列两两配对，使每两个配成对的 n阶排列在这个对换下互变．

定理1

对换改变排列的奇偶性．

即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

证明： 先看一个特殊的情形，即对换的两个数在排列中是相邻的情形．排列

$$\cdots jk \cdots \qquad (1)$$

经过 j，k对换变成

$$\cdots kj \cdots \qquad (2)$$

其中“$\cdots$”表示那些不动的数．

显然，在排列（1）中如j,k与其他的数构成逆序数，则在排列（2）中仍然构成逆序;如不构成逆序则在（2）中也不构成逆序;如果原来j,k组成逆序，那么经过对换，逆序数就减少一个；如果j,k不组成逆序，那么经过对换，逆序数就增加一个．不论增加一个还是增加1还是减少 1，排列的逆序数的奇偶性总是变了．因之，在这个特殊的情形，定理是对的．

再看一般的情形．设排列为

$$\cdots j\, i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \qquad (3)$$

经过 j, k对换，排列（3）变成

$$\cdots k\, i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \qquad (4)$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现．即

$$\cdots j\, i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \xrightarrow{j\text{与}i_1\text{对换}} \cdots i_1 j\, i_2 \cdots i_s k \cdots \xrightarrow{j\text{与}i_2\text{对换}}$$

$$\cdots i_1 i_2 j \cdots i_s k \cdots \longrightarrow \cdots \longrightarrow \cdots i_1 i_2 \cdots i_s j k \cdots \quad (s\text{次})$$

$$\xrightarrow[(1\text{次})]{j\text{与}k\text{对换}} \cdots i_1 i_2 \cdots i_s k\, j \cdots \xrightarrow[(s\text{次})]{k\text{与}i_s,\cdots,i_1\textbf{依次对换}} \cdots k\, i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

由此可知，从排列(3)变成排列(4)，可以通过$2s+1$次相邻位置的对换来实现．相邻位置的对换改变排列的奇偶性．显然，奇数次这样的对换的最终结果还是改变奇偶性．

推论

在全部 n阶排列中，奇、偶排列的个数相等，各有$n!/2$个.

证明：假设在全部n阶排列中共有s个奇排列，t个偶排列．将s个奇排列中的前两个数字对换，得到s个不同的偶排列，因此$s\leq t$． 同理可证，$t\leq s$，即奇、偶排列的总数相等，各有$n!/2$个．

定理2

任意一个n阶排列与排列$12\cdots n$都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性．

证明： 对排列的阶数n作数学归纳法，来证任意一个n阶排列都可以经过一系列对换变成$12\cdots n$.

1阶排列只有一个，结论显然成立．

假设结论对$n-1$阶排列已经成立，现在来证对n阶排列的情形结论也成立．

设$j_1j_2\cdots j_n$是一个n阶排列，如果$j_n=n$，则根据归纳假设，$n-1$阶排列$j_1j_2\cdots j_{n-1}$可以经过一系列对换

变成 $12\cdots(n-1)$，于是这一系列对换也就把 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成 $12\cdots n$.

如果 $j_n\neq n$，则对 $j_1j_2\cdots j_n$ 作 j_n,n 对换，它就变成 $j_1'j_2'\cdots j_{n-1}'n$，这就归结成上面的情形，因此结论普遍成立 .

相仿地，$12\cdots n$ 也可用一系列对换变成 $j_1j_2\cdots j_n$，因为 $12\cdots n$ 是偶排列，所以根据定理 1，所作对换的个数与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有相同的奇偶性 .

§1.3 n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成．

当$n=2$时，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

由不同行不同列的元素构成的乘积只有$a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$ 这两项．

上页 下页 返回 结束

当$n=3$时，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

每一项乘积都带有符号，在上述三阶行列式的展开式中，项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是1, 2, 3的一个排列．可以看出，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，对应的项带正号，当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，对应的项带负号．

二阶行列式显然也符合这个原则．

定义4

n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (*)$$

的代数和，其中$j_1j_2\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的一个排列，每一项都按下列规则带有符号：

上页 下页 返回 结束

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，（*）式带正号，

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，（*）式带负号，

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有n阶排列求和.

例1 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解： 按定义可知

$$\text{原式}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

上述和式中除 $j_1=1, j_2=2, \cdots, j_n=n$ 外，其余的各项全为0，故

$$\text{原式}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

显然

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n .$$

主对角线

例1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ d_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解： **次对角线**

$$原式 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

上式中除 $j_1 = n, j_2 = n-1, \cdots, j_n = 1$ 外，其余各项全为0，

故

$$原式 = (-1)^{\tau(n \cdots 21)} d_1 d_2 \cdots d_n = (-1)^{n(n-1)/2} d_1 d_2 \cdots d_n.$$

为方便确定符号，n阶行列式展开式的一般项记为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

事实上，数的乘法是交换的，因而这 n个元素的次序是可以任意写的，一般地，n阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中$i_1i_2\cdots i_n$, $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个n阶排列．可以证明，上述项在展开式的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

事实上，为了根据定义来确定上式的符号，就要把这 n 个元素重新排一下使得它们的行指标成自然顺序，也就是排成

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}.$$

于是它的符号是

$$(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}$$

下证 $(-1)^{\tau(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

由 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 变到 $a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$ 是经过一系列元素的对换来实现的，每作一次对换，元素的行指标与列指标所成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 就都同时作一次对换，

也就是 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，因而它们的和

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

的奇偶性不改变．这就是说，每作一次元素的对换不改变

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}.$$

的值．因此，在一系列对换之后有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12 \cdots n)++\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')}$$

$$= (-1)^{\tau(j_1' j_2' \cdots j_n')}.$$

例如，4阶行列式展开式中项

$$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$$

的符号为

$$(-1)^{\tau(2314)+\tau(1243)}=-1.$$

利用 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 来确定每一项的符号好处在于：行指标与列指标的地位是**对称的**， 因而为了确定每一项的符号，我们同样可以把每一项按列指标排起来，于是定义也可写成

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

§1.4 行列式的性质

性质1

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D'$$

由性质1立得下三角行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix}.$$

推论

若行列式中一行全为零，则行列式为零．

上页 下页 返回 结束

性质3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix}$$

性质4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质5

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ca_{k1} & a_{i2}+ca_{k2} & \cdots & a_{in}+ca_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

§1.5 行列式的展开

定义5 在n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素a_{ij}所在的第i行与第j列，剩下$(n-1)^2$个元素

赅垒鲋□飙□鲶瑁□n-1□□纪唣□柄旱□a_{ij}□怠肇唣

记为 M_{ij} . 记 $A_{ij} =$ □□□□□□□ 1 M_{ij}

称 A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式 .

例　证明循环行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

例1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0\end{vmatrix}.$$

解：

$$D=(-1)^{2+5}2\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 5\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 2\\ 0 & 6 & 6\end{vmatrix}$$

$$=(-10)(-2)\begin{vmatrix}-7 & 2\\ 6 & 6\end{vmatrix}=20(-42-12)=-1080.$$

例4 行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

称为n阶范德蒙(Vandermonde)行列式． 证明：

$$V_n=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

证明：（对n作数学归纳法）

当n=2时，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1,$$

结论显然成立．

假设结论对$n-1$阶范德蒙行列式成立．下证结论对n阶范德蒙行列式也成立．

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

前一行×(-a_1)加到后一行

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\
0 & a_2^2-a_2a_1 & a_3^2-a_3a_1 & \cdots & a_n^2-a_na_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_2^{n-1}-a_2^{n-2}a_1 & a_3^{n-1}-a_3^{n-2}a_1 & \cdots & a_n^n-a_n^{n-1}a_1
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & (a_2-a_1) & (a_3-a_1) & \cdots & (a_n-a_1) \\
0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n-a_1)
\end{vmatrix}
$$

$$=\begin{vmatrix} (a_2-a_1) & (a_3-a_1) & \cdots & (a_n-a_1) \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$n-1$阶范德蒙行列式，正好用**归纳假设**

$$=\prod_{k=2}^{n}(a_k-a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j).$$

§1.6 克莱姆（Cramer)法则

定理4

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式 $D \neq 0$, 则线性方程组（1）有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \qquad (2)$$

其中D_j是把矩阵D中第j列换成方程组的常数项$b_1, b_2,$ $\cdots$，b_n所成的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, j=1,2,\cdots,n. \qquad (3)$$

注 上述定理包含三个结论：

1）方程组（1）有解；

2）解是唯一的；

3）解由公式（2）给出．

定理4的证明步骤：

1. 将(2)代入方程组，验证它确是解；

2. 假如方程组有解，证明它的解必由公式（2）给出．

常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**. 显然，齐次线性方程组总是有解的，因为$(0, 0, \cdots, 0)$就是一个解，它称为**零解**.

对于齐次线性方程组，我们关心的问题常常是，它除去零解以外还有没有其它的解，或者说，它有没有**非零解**. 对于方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组，应用克拉默法则就有

推论

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

的系数行列式 $|D| \neq 0$，则它只有零解．换句话说，如果方程组（4）有非零解，则必有 $|D| = 0$．即

方程组（4）无非零解 $\Longleftrightarrow |D| \neq 0$

方程组（4）有非零解 $\Longleftrightarrow |D| = 0.$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -5x_2 & +x_4 & = 8, \\ x_1 & -3x_2 & & -6x_4 & = 9, \\ & 2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = -5, \\ x_1 & +4x_2 & -7x_3 & +6x_4 & = 0. \end{cases}$$

注　克莱姆法则只适用于系数行列式不为零的方程组，至于方程组的系数行列式为零的的情形，将在以后的一般情形中一并讨论．

例 2 求λ在什么条件下，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解．

解： 根据定理5，如果方程组有非零解，则系数行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

所以$\lambda = \pm 1$. 不难验证，当$\lambda = \pm 1$ 时，方程组确有非零解．

§1.7 行列式的计算

三角化法：

利用行列式的性质对行列式通过恒等变形化为上（下）三角行列式

降阶法：

直接降阶：按行列式中非零元素较少的行（列）展开

间接降阶：利用行列式性质，使行列式的某行（列）具有较少的非零元，再按其展开

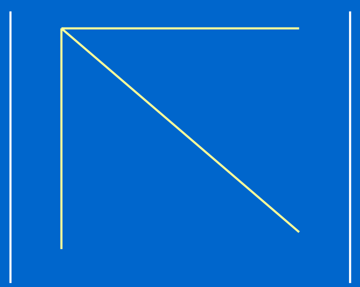
特殊行列式计算

1.

a) 削去行列式第二列后所有对角元或次对角元，再展开

b) 直接按第一列展开

2.



a) 消去第一列（行）后成三角行列式

b) 直接按第一行（列）展开

3.

a) 加边法，化原行列式如2.形式

b) 最后一行（列）消去其他各行（列），化为型如2.形式

常用技巧

- 提取因子法：
  - 行和相等时，各行加到第一行，提取公因子
  - 文字行列式，当文字取某些值时可使行列式为零，则行列式含此因子；结合行列式定义，可得行列式值

- 拆分法：$A=B+C$

归纳法：

I $\begin{cases} D_n = aD_{n-1} + b \\ D_n = cD_{n-1} + d \end{cases}$

II $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$

$$p = a + b, q = ab \quad \begin{cases} D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \\ D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) \end{cases}$$

化为 I 的情形

例 计算

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

解：

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} \xlongequal{◎ \leftrightarrow ◇} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{◇ + ◎ \times 2 \\ ◆ + ◎ \times (-3)}}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix} \xlongequal[□ + ◇ \times 2]{◆ + ◇ \times 2} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal{□ + ◆ \times (-17/16)}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal{\square + \blacklozenge \times (-17/16)} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-13)\cdot 16 \cdot (\frac{3}{2}) = 312.$$

不难算出，用这个方法计算一个 n 阶的数字行列式最多只需要做 $\frac{n^3+2n-3}{3}$ 次乘法和除法 .

上页 下页 返回 结束

Laplace展开定理

给定行列式

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

从中取出第 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行与第 $j_1, j_2, \cdots, j_p$ 列的交叉位置上的元素，

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n, 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le n$$

并按照这些元素在原来行列式 det(A) 中的次序排成一个 p 阶行列式，它称为行列式 det (A)的p阶子式，

记为$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$，即

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_p} \end{vmatrix}$$

从行列式 det(A) 中删去第 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_p$ 列上的所有元素，把余下的元素按它们在原来行列式det(A)中的次序排成一个n-p阶子式，它称为p阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$ 的余子式。

设从行列式 det (A)中n个行中删去第$i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行后余下的行是第 $i_{p+1}, i_{p+2}, \cdots, i_n$ 行，其中

$$1 \le i_{p+1} < i_{p+2} < \cdots < i_n \le n$$

设从行列式 det (A)中n个行中删去第$j_1, j_2, \cdots, j_p$ 行后余下的行是第 $j_{p+1}, j_{p+2}, \cdots, j_n$ 行，其中

$$1 \le j_{p+1} < j_{p+2} < \cdots < j_n \le n$$

则p阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$ 的余子式就是n-p阶子式

$$A\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} & \cdots & i_n \\ j_{p+1} & j_{p+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$ 的余子式 $A\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} & \cdots & i_n \\ j_{p+1} & j_{p+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}$

与符号 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+j_1+j_2+\cdots+j_p}$ 的乘积称为子式

$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix}$ 的代数余子式。

例1

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

取 $i_1 = 2, i_2 = 4; j_1 = 1, j_2 = 3$

$$A\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

它的余子式即为

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

例2

$$A\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = a_{ij}$$

它的代数余子式即为

$$(-1)^{i+j}A\begin{pmatrix} 12\cdots(i-1)(i+1)\cdots n \\ 12\cdots(j-1)(j+1)\cdots n \end{pmatrix}$$

记为 A_{ij}

命题1　下述行列式等式成立：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & a_{n,p+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,p+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

命题2 行列式按第i行展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

定理1 （Laplace展开定理）

取定行指标 $i_1, i_2, \cdots, i_p$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n$.

取遍行列式det (A)中第 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 行上的所有可能的p阶子式，并分别乘以相应的代数余子式，其和即为det(A). 具体地说，有

$$\det(A) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_p \le n} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_p \\ j_1 j_2 \cdots j_p \end{pmatrix}$$

$$\cdot (-1)^{i_1 + \cdots + i_p + j_1 + \cdots + j_p} A\begin{pmatrix} i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_n \\ j_{p+1} j_{p+2} \cdots j_n \end{pmatrix}$$