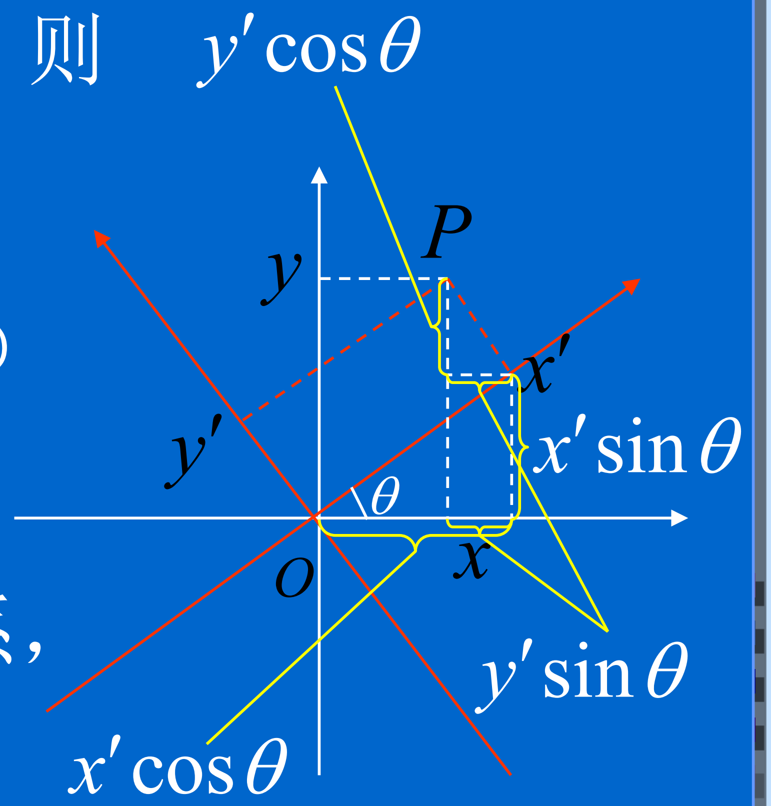
第二章 矩阵

§1 矩阵概念的一些背景

引例1

在解析几何中考虑坐标变换时，如果只考虑坐标系的转轴（反时针旋转θ角），则平面直角坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases} \qquad (1)$$



其中θ为x轴与x'轴的夹角．

显然，新旧坐标之间的关系，完全可以通过公式中系数排成

的2×2矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (2)$$

表示出来.

通常，矩阵（2）称为**坐标变换（1）的矩阵**.

在空间的情形，保持原点不动的仿射坐标系的变换有公式

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{cases} \qquad (3)$$

同样，矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

就称为**坐标变换（3）的矩阵**.

引例2 二次曲线的一般方程为

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0. \qquad (5)$$

（5）的左端可以用表

	x	y	1
x	a	b	d
y	b	c	e
1	d	e	f

来表示，其中每一个数就是它所在行和列所对于的 x，y或1的乘积的系数,而(5)的左端就是这样的约定所形成的项的和．换句话说，只要规定了x, y,1的次序，二次方程(5)的左端就可以简单用矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad (6)$$

来表示．通常，(6)称为二次曲线(5)的矩阵．

事实上，我们以后会看到，这种表示法不只是形式上，而且矩阵(6)的性质的确能够反映了所表示二次曲线的性质．

引例 3

假设在某一地区，某一种物资，比如说煤，有s个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_s$和n个销地$B_1, B_2, \cdots, B_n$，则一个调运方案就可用一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

来表示，其中a_{ij}表示由产地A_i运到销地B_j的数量.

n维向量也可以视为矩阵的特殊情形.

n维行向量就是$1\times n$矩阵，n维列向量就是$n\times 1$矩阵.

以后用大写的拉丁字母A，B，…，或者

$$(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$$

来表示矩阵.

有时需要指明所讨论矩阵的级数，可以把$s\times n$写成A_{sn}，B_{sn}，…，或者

$$(a_{ij})_{sn},(b_{ij})_{sn},\cdots$$

注意矩阵的符号与行列式符号之间的区别.

设 $A=(a_{ij})_{mn}$， $B=(b_{ij})_{lk}$， 如果$m=l$， $n=k$， 且

$$a_{ij}=b_{ij},$$

对$i=1,2,\cdots,m$ ；$j=1,2,\cdots,n$ 都成立， 则称$A=B$.

即只有完全一样的矩阵才称为相等.

§2 矩阵的运算

为了确定起见，取定一个数域P，以下所讨论的的矩阵全部都是数域P中的数组成的.

1. 加法

定义1 设

$$A=(a_{ij})_{sn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad B=(b_{ij})_{sn}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

是两个$s\times n$矩阵，则矩阵

$$C=(c_{ij})_{sn}=(a_{ij}+b_{ij})_{sn}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{pmatrix}$$

称为A与B的**和**，记为

$$C=A+B.$$

矩阵的加法就是矩阵对应的元素相加.

注 相加的矩阵必须要有相同的行数和列数.

矩阵加法的运算性质

结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$

交换律 $A+B=B+A.$

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记为O_{sn}，在不致于混淆的情况下，可简记为$O.$

显然，对所有的A，

$$A+O=A.$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \cdots & -a_{sn} \end{pmatrix},$$

称为矩阵A的**负矩阵**，记为$-A$.

显然有

$$A+(-A)=O.$$

矩阵的**减法**定义为

$$A-B=A+(-B).$$

命题1

$$\text{秩}(A+B)\leq\text{秩}(A)+\text{秩}(B).$$

证明:

设A, B为$m\times n$矩阵，秩$(A)=r$，秩$(B)=s$.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为矩阵A的行向量组，$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$ 为它的极大无关组，$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$ 为矩阵B的行向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$的极大无关组，则

$$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m$$

为矩阵$A+B$的行向量组.

上页 下页 返回 结束

显然$\alpha_i+\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$ 可由$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$线性表出，

故它的极大无关组也可由$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$线性表出，即

$$\text{秩}(A+B)\le r+s.$$

$$\text{秩}(A+B)\le\text{秩}(A)+\text{秩}(B).$$

2．乘法

引例

设x_1，x_2，x_3，x_4和y_1，y_2，y_3是两组变量，它们之间的关系为

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3, \end{cases} \quad (1)$$

又如z_1，z_2是第三组变量，它们与y_1，y_2，y_3的关系为

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2. \end{cases} \tag{2}$$

由(1), (2)不难得出x_1，x_2，x_3，x_4与z_1，z_2的关系：

$$x_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} y_k = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} (\sum_{j=1}^{2} b_{kj} z_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} a_{ik} b_{kj} z_j = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} z_j$$

$$= \sum_{j=1}^{2} (\sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}) z_j \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

上页 下页 返回 结束

如果用

$$x_i=\sum_{j=1}^{2}c_{ij}z_j \quad (i=1,2,3,4). \qquad (4)$$

来表示x_1，x_2，x_3，x_4与z_1，z_2的关系，比较(3)，(4)就有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,2,3,4\ ;\ j=1,2). \qquad (5)$$

用矩阵的表示为：如果

$$A=(a_{ik})_{43}, B=(b_{kj})_{32}$$

分别表示变量x_1,x_2,x_3,x_4与y_1,y_2,y_3以及y_1,y_2,y_3与z_1,z_2之间的关系，则表示x_1,x_2,x_3,x_4与z_1,z_2之间的关系的矩阵$C=(c_{ij})_{42}$可由公式(5)决定.

矩阵C称为矩阵A与B的**乘积**，记为$C=AB$.

定义2

设

$$A=(a_{ik})_{sn}, B=(b_{kj})_{nm},$$

则矩阵

$$C=(c_{ij})_{sm},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, \qquad (6)$$

称为A与B的乘积，记为

$$C=AB.$$

$$
\begin{array}{c} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{s1} & \cdots & a_{sk} & \cdots & a_{sn}
\end{pmatrix}_{s\times n}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & j\text{列} & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{km} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & b_{nm}
\end{pmatrix}_{n\times m}
\end{array}
$$

$C=AB$**的第**i**行，第**j**列的元素**$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

例如

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}.$$

$$c_{1m}=a_{11}b_{1m}+a_{12}b_{2m}+\cdots+a_{1n}b_{nm}.$$

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}-5 & 6 & 7\\ 10 & 2 & -6\\ -2 & 17 & 10\end{pmatrix}$$

例2 设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases}$$

一般线性方程组，令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix},$$

则上述线性方程组可写成 $AX = B$.

矩阵乘法的运算性质

结合律 $$A(BC)=(AB)C$$

证明： 设

$$A=(a_{ij})_{sn},B=(b_{jk})_{nm},C=(c_{kl})_{mr},$$

令

$$V=AB=(v_{ik})_{sm},\quad W=BC=(w_{jl})_{nr},$$

其中

$$v_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\qquad (i=1,2,\cdots,s;k=1,2,\cdots,m),$$

$$w_{jl}=\sum_{k=1}^{m}b_{jk}c_{kl}\qquad (j=1,2,\cdots,n;l=1,2,\cdots,r),$$

因为

$$(AB)C = VC$$

中VC的第i行第l列元素为

$$\sum_{k=1}^{m} v_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}, \qquad (7)$$

而

$$A(BC) = AW$$

中AW的第i行第l列元素为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{jk}c_{kl}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ij}b_{jk}c_{kl}, \qquad (8)$$

由于双重连加号可以交换次序，所以(7)与(8)的结果相等，故$(AB)C = A(BC)$.

乘法不满足交换律

即一般来说，$AB \neq BA$.

首先，AB有意义时，BA不一定有意义．

例如，A为$s \times n$级，B为$n \times m$级，$s \neq m$.

其次，AB, BA都有意义时，AB, BA不一定同级数.

例如，A为$s \times n$级，B为$n \times s$级，$s \neq n$.

A为$s \times s$级，B为$n \times n$级.

最后，AB, BA都有意义时，且有相同级数时，它们也不一定相等．

例如，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

而

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

乘法不满足消去律

即

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

也等价于

$$AB = O \not\Rightarrow A = O \text{ 或 } B = O.$$

反例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

但

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义3

主对角线上元素全是1，其余元素全是0的$n\times n$矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为n级**单位矩阵**，记为E_n，或在不致于引起混淆时可简写成E.

注1

显然，

$$A_{sn}E_n = A_{sn},$$

$$E_sA_{sn} = A_{sn}.$$

注2

矩阵的乘法和加法还满足分配律，即

$$A(B+C) = AB + AC,$$

$$(B+C)A = BA + CA.$$

定义

n级方阵A的方幂运算，定义

$$\begin{cases} A^1 = A, \\ A^{k+1} = A^k A. \end{cases}$$

即A^k为k个A连乘.

注1

方幂只能对行数与列数相等的方阵才有定义.

注2

$$A^{k+l} = A^k A^l, (A^k)^l = A^{kl},$$

其中k，l为任意正整数.

上页 下页 返回 结束

注3 一般来说，

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$

$$(AB)^k = \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{k\text{个}},$$

$$A^k B^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}\underbrace{BB\cdots B}_{k\text{个}}.$$

因为乘法不具有交换律，它们不一定相等.

3.数量乘法

定义4

矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵$A=(a_{ij})_{sn}$与数k的**数量乘积**，记为kA.

即用数k乘矩阵就是把矩阵的每个元素都乘上k.

矩阵数量乘法的运算规律

$$(k+l)A = kA + lA,$$

$$k(A+B) = kA + kB,$$

$$k(lA) = (kl)A,$$

$$1A = A,$$

$$k(AB) = (kA)B = A(kB).$$

上述等式的证明是显然的.

矩阵

$$kE=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

通常称为**数量矩阵**.

显然,

$$kA=(kE)A=A(kE).$$

上式表明，数量矩阵与所有的$n\times n$矩阵作乘法是可交换的.

事实上，若一个n级矩阵与所有n级矩阵作乘法是可交换的，则这个矩阵一定是数量矩阵.

4.转置

定义5

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},$$

所谓A的转置就是矩阵

(有时也记为A^T)

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

显然，$s\times n$矩阵的转置为$n\times s$矩阵.

矩阵转置的运算规律

$$(A')' = A, \tag{17}$$

$$(A+B)' = A' + B', \tag{18}$$

$$(AB)' = B'A', \tag{19}$$

$$(kA)' = kA'. \tag{20}$$

(17), (18), (20)的证明是显然的，下证(19).

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

则AB中第i行第j列的元素为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

所以$(AB)'$的第i行第j列的元素为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.$$

其次，B'的第i行第k列的元素为b_{ki}，A'的第k行第j列的元素为a_{jk}，故$B'A'$的第i行第j列的元素为

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.$$

故$(AB)' = B'A'$.

例 设

$$A=(1,-1,2),B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}.$$

于是

$$AB=(1,-1,2)\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}=(9,2,-1).$$

$$A'=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},B'=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}.$$

所以

$$B'A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (AB)'.$$

§3 矩阵乘积的行列式与秩

定理1

设A，B是数域P上的两个$n\times n$矩阵，则

$$|AB|=|A||B|, \qquad (1)$$

即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积.

推论1

设$A_1, A_2, \cdots, A_m$是数域P上的两个$n\times n$矩阵，则

$$|A_1A_2\cdots A_n|=|A_1||A_2|\cdots|A_n|.$$

定义6

数域P上的$n\times n$矩阵A称为**非退化的**，如果

$$|A|\neq 0;$$

否则称为**退化的**.

线性方程组$Ax=0$只有零解

$\Longleftrightarrow$ A是非退化的，即$|A|\neq 0$

$\Longleftrightarrow$ A是满秩的，即秩$(A)=0$

定理2

设A是数域P上$n\times m$矩阵，B是数域P上$m\times s$矩阵，则

$$秩(AB)\le\min[秩(A),\ 秩(B)], \qquad (2)$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

证明： 先证秩$(AB)\le$秩(B).

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \boxed{b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1s}} \\ \boxed{b_{21} \quad b_{22} \quad \cdots \quad b_{2s}} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \boxed{b_{m1} \quad b_{m2} \quad \cdots \quad b_{ms}} \end{pmatrix}\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{matrix}.$$

令$B_1, B_2, \cdots, B_m$表示B的行向量，$C_1, C_2, \cdots, C_m$表示AB的行向量，

因为C_i的第j个分量为$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$，而

$$a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \cdots + a_{im}B_m$$

的第j个分量也为$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$，所以

$$C_i = a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \cdots + a_{im}B_m \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

从而AB的行向量组$C_1, C_2, \cdots, C_m$可经B的行向量组线性表出．于是AB的秩不超过B的秩，即

秩$(AB) \leq$秩(B).

再证秩$(AB) \le$秩(A).

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \quad A_1 \qquad A_2 \qquad\quad\;\; A_m \end{array}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}.$$

令$A_1, A_2, \cdots, A_m$表示A的列向量，$D_1, D_2, \cdots, D_m$表示AB的列向量，与上述证明类似可知，

$$D_i = b_{1i}A_1 + b_{2i}A_2 + \cdots + b_{mi}A_m \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

即矩阵 AB 的列向量组可以经矩阵A的列向量组线性表出，因而前者的秩不超过后者的秩，即

$$秩(AB) \le 秩(A).$$

综上所述，

$$秩(AB)\le秩(A)，\quad 且秩(AB)\le秩(B)，$$

从而

$$秩(AB)\le\min[秩(A), 秩(B)].$$

推论3

设 $A=A_1\,A_2\cdots,A_m$， 则

$$\square(A)\le\min_{1\le j\le t}\square(A_j).$$

§4 矩阵的逆

定义7

n级方阵A称为可逆的，如果有n级方阵B，使得

$$AB = BA = E \qquad (1)$$

其中E是n级单位矩阵.

注1 只有方阵才能满足(1) .

事实上，设 A，B分别为$m\times n$，$n\times m$矩阵，若

$$AB = E_m,\quad BA = E_n,$$

则

$$n = \square(E_n) = \square(BA) \le \square(A) \le m.$$

即$n \le m$. 同理 $m \le n$，从而 $m = n$.

注2 对于任意的矩阵A，适合等式(1)的矩阵B是唯一的(如果有的话).

事实上，假设B_1，B_2是两个适合(1) 的矩阵，则

$$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2.$$

定义8

如果矩阵B适合（1），则B就称为A的**逆矩阵**. 记为 A^{-1}.

矩阵A可逆的条件

定义9 设A_{ij}是矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

中元素a_{ij}的代数余子式，矩阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为A的**伴随矩阵**.

注1

矩阵A的伴随矩阵A^*的第i行第j列元素为A_{ji}，即为a_{ji}的代数余子式.

注2

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的第i行第j列元素为

$$a_{i1}A_{1j} + a_{i2}A_{2j} + \cdots + a_{in}A_{nj} = \begin{cases} |A|, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

上页 下页 返回 结束

故

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E. \qquad (2)$$

类似可知，

$$A^*A = |A|E.$$

于是

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

由此可知，若 $|A| \neq 0$，则

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A = E. \qquad (3)$$

定理3

$$A\text{可逆} \Longleftrightarrow |A| \neq 0.$$

而 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^{*}.$

证明:

$(\Leftarrow)$ 若 $|A| \neq 0$, 则

$$A\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)A = E.$$

由定义可知，A可逆.

$(\Rightarrow)$ 若A可逆，则存在 A^{-1} 使 $AA^{-1} = E.$

两边取行列式，得

$$|A||A^{-1}| = |E| = 1,$$

因而$|A| \neq 0.$

注1 由定理3容易看出，对于n级方阵A, B，如果

$$AB=E,$$

则 A，B就都是可逆的，且它们互为逆矩阵.

注2 定理3不仅给出了一矩阵可逆的条件，同时也给出了求逆矩阵的公式

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

但这种求法需要计算n^2个$n-1$级行列式，显然计算量一般是非常大的. 需要给出另一种求法.

例如 对于2级方阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

若 $ad-bc\neq 0$, 则

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

注3 若 $|A|\neq 0$，则

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}.$$

推论 如果矩阵A，B可逆，则 A' 与AB也可逆，且

$$(A')^{-1}=(A^{-1})',$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证明: A，B可逆 $\Longrightarrow |A|\neq 0, |B|\neq 0 \Longrightarrow$

$$|A'|=|A|\neq 0, |AB|=|A||B|\neq 0$$

$\Longrightarrow A'$ 与AB也可逆. 又因为

$$A'(A^{-1})'=(A^{-1}A)'=E'=E,$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

类似可证$(A^{-1})'A'=E, (B^{-1}A^{-1})(AB)=E.$

故

$$(A')^{-1}=(A^{-1})',\quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

矩阵的逆在线性方程组的应用（克拉默法则的另一证法）

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

的矩阵形式为

$$AX = B,$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

若$|A|\neq 0$，则A可逆，故

$$X=(A^{-1}A)X=A^{-1}(AX)=A^{-1}B,$$

代入原方程即得$A(A^{-1}B)=B.$

由此可知$A^{-1}B$是一个解.

设$X=C$是原方程组的一个解，则

$$AC=B$$

得

$$A^{-1}(AC)=A^{-1}B,$$

即

$$C=A^{-1}B.$$

由此可知，$X=A^{-1}B$是唯一解.

进一步，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}A^*B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

于是

$$x_i = \frac{1}{|A|}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n)$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理4

A是一个$s\times n$矩阵，如果P是$s\times s$可逆矩阵，Q是$n\times n$可逆矩阵，则

$$秩(A)=秩(PA)=秩(AQ).$$

证明：

令

$$B=PA,$$

由定理2，

$$\square(B)\le\square(A);$$

但是由$A=P^{-1}B$, 又有$\square(A)\le\square(B)$.

所以秩$(A)=$秩$(B)=$秩(PA).

类似可证第二个等式.

§5 矩阵的分块

对于级数较高的矩阵，常常可以把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，就如矩阵是由数组成的一样，即**矩阵的分块**.

例1 矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} E_2 & O \\ A_1 & E_2 \end{pmatrix}$$

其中，E_2表示2级单位矩阵，而

$$A_1=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$B_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B_{12}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{21}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B_{22}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

在计算AB时，把 A，B都看出是由这些小矩阵组成的，即按2级矩阵来计算。 于是

$$AB=\begin{pmatrix} E_2 & O \\ A_1 & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1B_{12}+B_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1B_{12}+B_{22}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

从而

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

不难验证，直接按4级矩阵乘积的定义来作，结果是一致的。

一般地说，设$A=(a_{ik})_{sn}$，$B=(b_{kj})_{nm}$，把A，B分成一些小矩阵：

$$A=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl} \end{pmatrix} \end{array}, \quad B=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{array} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr} \end{pmatrix} \end{array},$$

其中每个A_{ij}是$s_i\times n_j$小矩阵，每个B_{ij}是$n_i\times mj$小矩阵。于是

$$
C = AB = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\
\begin{pmatrix}
C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\
C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr}
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

其中

$$
C_{pq} = A_{p1}B_{1q} + A_{p2}B_{2q} + \cdots + A_{pl}B_{lq}
$$

$$
= \sum_{k=1}^{l} A_{pk}B_{kq} \quad (i = 1,2,\cdots,t \text{ 与 } j = 1,2,\cdots,r).
$$

不难验证，这个结果由矩阵乘积的定义直接验证即得。

矩阵分块的简单应用

1. 在证明关于矩阵乘积的秩的定理时，已经用了矩阵分块的想法。

令$B_1, B_2, \cdots, B_m$表示B的行向量，于是

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

这就是B的一种分块。按分块相乘，就有

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + \cdots a_{1m}B_m \\ a_{21}B_1 + a_{22}B_2 + \cdots a_{2m}B_m \\ \vdots \\ a_{n1}B_1 + a_{n2}B_2 + \cdots a_{nm}B_m \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots a_{1m}B_m \\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots a_{2m}B_m \\ \vdots \\ a_{n1}B_1+a_{n2}B_2+\cdots a_{nm}B_m \end{pmatrix}$$

从上式很容易看出 AB的行向量是 B的行向量的线性组合。

另一方面，令$A_1, A_2, \cdots, A_m$表示A的列向量，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}=(A_1, A_2, \cdots, A_m)$$

则

$$AB=(A_1, A_2, \cdots, A_m)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^{m} b_{i1}A_i, \sum_{i=1}^{m} b_{i2}A_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} b_{is}A_i)$$

从上式很容易看出 AB的列向量是 A的列向量的线性组合。

2. 求矩阵

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

的逆矩阵，其中A，B分别是k级和r级的可逆矩阵，C是$r\times k$矩阵，O是$k\times r$零矩阵。

首先，因为

$$|D|=|A||B|,$$

所以当A，B可逆时，D也可逆。

设

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, =\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_k & O \\ O & E_r \end{pmatrix},$$

乘出并比较等式两边，得

$$\begin{cases} AX_{11}=E_k, \longrightarrow X_{11}=A^{-1}, \longrightarrow X_{21}=-B^{-1}CA^{-1} \\ AX_{12}=O, \longrightarrow X_{12}=A^{-1}O=O, \\ CX_{11}+BX_{21}=O, \longrightarrow BX_{21}=-CX_{11} \longrightarrow X_{21}=-B^{-1}CX_{11} \\ CX_{12}+BX_{22}=E_r. \longrightarrow X_{22}=B^{-1}. \end{cases}$$

对角矩阵与准对角矩阵

定义

形如

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中a_i是数，通常称为**对角矩阵**。

定义

形如

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}$$

的矩阵，其中A_i是n_i级方阵，通常称为**准对角矩阵**。

当然，准对角矩阵包括对角矩阵作为特殊情形。

对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_l \end{pmatrix}$$

如果它们相应的分块是同级的，则

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_lB_l \end{pmatrix},\quad A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l+B_l \end{pmatrix}.$$

它们还是准对角矩阵。

其次，如果A_1，A_2，…，A_l都是可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_l^{-1} \end{pmatrix}.$$

§6 初等矩阵

定义10

由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**。

注 由定义可知，初等矩阵有以下三种情形：

1. 交换E的第i行与第j行，记为$P(i,j)$；
2. 用数域P中非零数c乘E的第i行，记为$P(i(c))$；
3. 把E的第j行的k倍加到第i行，记为$P(i,j(k))$.

即

$$P(i,j)=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&&\cdots&&1&&&\\&&&&1&&&&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&&&&1&&&&\\&&&1&&\cdots&&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{第}i\text{行}\\ \\ \\ \\ \text{第}j\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array},$$

上页 下页 返回 结束

$$P(i(c))=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&c&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\text{第}i\text{行}$$

$$P(i,j(k))=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第}i\text{行} \\ , \\ \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

注 同样可以得到与列变换相应的初等矩阵。

1. 交换E的第i列和第j列，即

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right), \\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \text{第}i\text{列} & & & & \text{第}j\text{列} & & &
\end{array}
\end{array}
$$

显然，它与交换E的第i行和第j行，即$P(i,j)$相同.

2. 用数域P中非零数c乘E的第i列，即

$$P(i(c)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

第i列

显然，它与初等矩阵$P(i(c))$相同.

3. 把E的第j列的k倍加到第i列，即

$$
P(i,j(k)) = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & \vdots & \ddots & & & \\
& & k & \cdots & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} \\
\qquad\quad \text{第}i\text{列} \quad \text{第}j\text{列}
\end{array},
$$

显然它与初等矩阵$P(j,i(k))$或$P^T(i,j(k))$相同.

综上所述，通过初等列变换得到的初等矩阵与前面所列举的三类初等矩阵形式上是相同.

上页 下页 返回 结束

引理

对一个$s\times n$矩阵A作一**初等行变换**就相当于在A的**左边乘上**相应的$s\times s$初等矩阵；

对一个$s\times n$矩阵A作一**初等列变换**就相当于在A的**右边乘上**相应的$n\times n$初等矩阵；

证明：

（只证行变换的情形，列变换的情形可同样证明）

设$A_1, A_2, \cdots, A_s$为A的行向量。即$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}$,

则

(1)

$$P(i,j)A=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

即左边乘上$P(i, j)$相当于交换A的i行与j行;

(2)

$$P(i(c))A=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ cA_i \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

即左边乘上$P(i(c))$ 相当于用数c乘 A的i行。

(3)

$$P(i,j)A=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c}A_1\\ \vdots\\ A_i+kA_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_s\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}$$

即左边乘上$P(i,\ j\ (k))$ 相当于把A的j行加到i行。

注 不难看出，初等矩阵都是可逆的，它们的逆矩阵还是初等矩阵.

事实上，

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j),$$

$$P(i(c))^{-1} = P(i(c^{-1})),$$

$$P(i,j(k))^{-1} = P(i,j(-k)).$$

在解线性方程组时我们看到，用初等行变换可以化简矩阵。如果同时用行与列的初等变换，则矩阵还可以进一步化简。为了方便，我们引入

定义11

矩阵A与B称为**等价的**（或**相抵**），如果 B可以经过一系列初等变换得到。

注 等价是矩阵间的一种关系。

不难证明，它具有：

1）**反身性**，即 A与自身等价；

2）**对称性**，即若 A与B等价，则B与A等价；

3）**传递性**，即若 A与B等价，B与C等价，则A与C等价。

定理5

任意一个$s \times n$矩阵 A都与一形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

r个1

$r = 秩(A)$

的矩阵等价，它称为矩阵A的**标准形**，主对角线上 1 的个数等于A的秩。

上页 下页 返回 结束

证明:

若 $A=O$，则它已经是标准形了。

以下不妨设$A\neq O$。经过初等变换，A一定可以变成一左上角元素不为零的矩阵。

当$a_{11}\neq 0$时，把其余的行减去第一行的 $a_{11}^{-1}a_{i1}$ $(i=2,3,\cdots,s)$倍，其余的列减去第一列的$a_{11}^{-1}a_{1j}$ $(j=2,3,\cdots,n)$倍。然后用a_{11}^{-1}乘第一行，A就变成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

A_1是一个$(s-1)\times(n-1)$的矩阵。对A_1再重复以上的步骤。这样继续下去就可得出所要的标准形。

显然，标准形矩阵的秩就等于它主对角线上的1的个数。而初等矩阵不改变矩阵的秩，所以1的个数也就是矩阵A的秩。

注 用分块矩阵可写成，A的标准形为

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(s-r)\times r} & O_{(s-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

例 用初等变换将下列矩阵化为标准形，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&3&2&5\\2&2&6&7\\2&4&5&6\end{pmatrix}.$$

第2行+第1行×(-1)
第3行+第1行×(-2)
第4行+第1行×(-2)
第2列+第1列×(-1)
第3列+第1行×(-3)
第4列+第1行×(-1)

解

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\1&3&2&5\\2&2&6&7\\2&4&5&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&2&-1&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&2&-1&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第4行 + 第2行×(-1)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第3列 + 第2列×(1 / 2)

第4列 + 第2列×(- 2)

第2列×(1 / 2)

第4列×(1 / 5)

交换第3列,第4列

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命题

矩阵 A，B等价的充分必要条件是有初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l,Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$ 使

$$A = P_1P_2\cdots P_lBQ_1Q_2\cdots Q_t.$$

证明： 由引理与定义5立知。

对一矩阵作初等行变换相当于左乘一初等矩阵；作初等列变换相当于右乘一初等矩阵。

定理6

n级矩阵 A为可逆的充分必要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积

$$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_m .$$

证明:

n级矩阵A可逆 $\Longleftrightarrow$ A的秩为n

$\Longleftrightarrow$ A的标准形为E_n $\Longleftrightarrow$ A与E_n等价

$\Longleftrightarrow$ A能表成一些初等矩阵的乘积

$$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_m .$$

推论1

两个$s \times n$矩阵A，B等价的充分必要条件为，存在可逆的s级矩阵P与可逆的n级矩阵Q使

$$A = PBQ。$$

推论2

可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵。

证明:

由定理6可知，A可逆

$\Longleftrightarrow$ A能表成一些初等矩阵的乘积 $A = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$.

可改写为

$$Q_m^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} A = E.$$

因为初等矩阵的逆矩阵还是初等矩阵，同时在矩阵 A的左边乘初等矩阵就相当于对 A作初等行变换。

上述讨论提供了一个求逆矩阵的方法

设 A 是一个 n 级可逆矩阵，由推论2，有一系列初等矩阵 $P_1, \cdots, P_m$ 使

$$P_m \cdots P_1 A = E,$$

于是

$$A^{-1} = P_m \cdots P_1 = P_m \cdots P_1 E,$$

由上面两个等式说明，如果用一系列初等行变换把可逆矩阵 A 化成单位矩阵，则同样地用这一系列初等行变换去化单位矩阵，就得到 A^{-1}。

把A, E这两个$n\times n$矩阵凑在一起，作出一个$n\times 2n$矩阵

$$(A \quad E),$$

按矩阵的分块乘法有

$$P_m \cdots P_1 (A \quad E) = (P_m \cdots P_1 A \quad P_m \cdots P_1 E)$$

$$= (E \quad A^{-1}).$$

上式提供了一个具体求逆矩阵的方法。

作$n\times 2n$矩阵$(A \quad E)$，用初等行变换把它的左边一半化成E，这时，右边的一半就是A^{-1}.

例 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{pmatrix},$$

交换第1、2行

第3行＋第1行×(-2)

第3行＋第1行×(-2)

求 A^{-1}.

解

$$\begin{pmatrix}0&1&2&1&0&0\\1&1&4&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-3&-8&0&-2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-2&3&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

第2行＋第3行

第1行＋第3行×2

第3行×(- 1/ 2)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

类似可以证明，可逆矩阵也能用初等列变换化成单位矩阵，这就给出了用初等列变换求逆矩阵的方法。

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} AQ_1\cdots Q_m \\ EQ_1\cdots Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ Q_1\cdots Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

$$AQ_1\cdots Q_m = E \Rightarrow Q_1\cdots Q_m = A^{-1}.$$

§7 分块乘法的初等变换及应用举例

将单位矩阵如下进行分块

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}.$$

对它进行两行（列）对换得

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix};$$

某一行（列）左乘（右乘）一个矩阵P得

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix};$$

一行（列）加上另一行（列）的P(矩阵)倍数得

$$\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}.$$

和初等矩阵与初等变换的关系一样，用这些矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的变换：

行变换对应左乘一初等矩阵，想要对原矩阵施行何种变换，就**先对单位矩阵施行同样的行变换**，再将变换后得到的初等矩阵**左乘**原矩阵即可.

1 交换两行

若要交换$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的两行，则先交换$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$的两行得$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}$，再将它左乘$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$得

$$\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}.$$

2 某一行左乘一矩阵P

若要将矩阵P左乘$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的第1行，则先将矩阵$P$左乘$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$的第一行得$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$, 再将它左乘$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$得

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}.$$

类似地将矩阵P左乘$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的第2行相当于

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ PC & PD \end{pmatrix}.$$

3 一行加上另一行的P（矩阵）的倍数

若要将$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的第1行的$P$倍加到第2行，则先将$\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$的第1行的$P$倍加到第2行得$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}$，再将它左乘$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$得

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{pmatrix}.$$

类似地将$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的第2行的$P$倍加到第1行,相当于

$$\begin{pmatrix} E_m & P \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+PC & B+PD \\ C & D \end{pmatrix}.$$

列变换对应右乘一初等矩阵，想要对原矩阵施行何种变换，就**先对单位矩阵施行同样的列变换**，再将变换后得到的初等矩阵**右乘**原矩阵即可.

例如　交换两列相当于

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E_n \\ E_m & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix},$$

第1列右乘矩阵P得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & E_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix},$$

第2列加上第1列的P倍

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & P \\ O & E_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B+AP \\ C & D+CP \end{pmatrix}.$$

初等行变换相当于左乘相应的初等矩阵；
初等列变换相当于右乘相应的初等矩阵.

它们之间的作用是等价的，初等变换很直观，它可以帮助我们思考问题，但每一次初等变换实质上是改变了矩阵，所以只能用“$\longrightarrow$”而不能用“$=$”.而且又不容易“记录”每次具体的变换内容，也就不容易考察前后两个矩阵之间的关系.这就不利于严格叙述，例如在某些证明过程中.

而左（右）乘初等矩阵正好可以避免这一点，所以我们往往用初等变换来思考，用左（右）乘初等矩阵来表述.

例1 求分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

的行列式， 其中A为m级可逆阵，D为n级方阵.

解 将第1行的$-CA^{-1}$倍加到第2行可得准上三角

因为

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式得

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|.$$

例2 求分块矩阵

$$T=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

的逆矩阵， 其中A，D为可逆阵.

先作行变换，化为准对角形

解

$$\begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix},$$

两边取逆得

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}^{-1},$$

而

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O \\ -CA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

例3 设

$$T_1=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

可逆，D可逆，试证$(A-BD^{-1}C)^{-1}$存在，并求T_1^{-1}.

解

观察 $(A-BD^{-1}C)$的形状，可以发现它是 T_1 的第1行加上第2行的$-BD^{-1}$倍后左上角的元素

所以可以考虑用$\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}$去左乘它

因为

$$\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

且左端为两个可逆矩阵，故右端仍可逆.

从而 $A-BD^{-1}C$ 可逆，即$(A-BD^{-1}C)^{-1}$存在.

在由例1知

$$\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & O \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

又由（1）可知

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1},$$

即

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & O \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{pmatrix}.$$

例4 证明行列式的乘积公式$|AB|=|A||B|$.

解 设

$$T=\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix},$$

则$|T|=|A||B|$. 另一方面，

$$\begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & AB \\ -E & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & O \\ B & -E \end{pmatrix},$$

两边取行列式得

$$|A||B|(-1)^n=|AB|(-1)^n,$$

故

$$|AB|=|A||B|.$$

例5 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, 1 \leq k \leq n,$$

则有下三角矩阵$B_{n\times n}$，使

$$BA=\text{上三角形矩阵}.$$

证明： 对n作归纳法.

当n=1时，一阶矩阵既是上三角形又是下三角形，故命题自然成立.

设结论对$n-1$命题为真，设

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,-1} \end{pmatrix}$$

显然A_1满足命题中所设的条件．由归纳假设，有下三角形矩阵$(B_1)_{(n-1)\times(n-1)}$满足

$$B_1A_1=\text{上三角形矩阵}.$$

对A作如下分块，

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ O & -\alpha A_1^{-1}\beta+a_{nn} \end{pmatrix}.$$

再作

$$\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \beta \\ O & -\alpha A_1^{-1}\beta+a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\beta \\ O & -\alpha A_1^{-1}\beta+a_{nn} \end{pmatrix}$$

这时矩阵已成为上三角形. 将两次乘法结合起来即为

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ -\alpha A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

此即所要求的下三角矩阵.

上页 下页 返回 结束