第三章 线性方程组

§1 消元法

线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \qquad (1)$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表n个**未知量**，s是方程的个数，

a_{ij} $(i = 1,2,\cdots,s,\ j = 1,2,\cdots,n)$ 称为**方程组 的系数**，

b_j $(j = 1,2, \cdots, s)$称为**常数项**．

注1 方程组中未知量的个数n与方程的个数s不一定相等.

注2 系数a_{ij}的第一个指标i表示它在第i个方程中，第二个指标j表示它是x_j的系数.

所谓方程组(1)的一个**解**就是指由n个数$k_1, k_2, \cdots, k_n$组成的有序数组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$，当$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别用$k_1, k_2, \cdots, k_n$代入后，(1)中每个等式都变成恒等式.

方程组(1)的解的全体称为它的**解集合**.

解方程组实际上就是找出它全部的解,

如果两个方程组有相同的解集合，它们就称为**同解的**.

一个线性方程组完全由它的全部系数和常数项所共同确定．增广矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

可以用加减消元法和代入消元法求解二元，三元线性方程组．

例 解方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

解： 第二个方程减去第一方程的2倍，第三个方程减去第一个方程，得 **在后两个方程中消去未知量x_1**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

第二个方程减去第三个方程的2倍，把第二、三个方程互换位置，即得 **其中一个方程中消去未知量x_2**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_3 = -6. \end{cases} \Longrightarrow x_3 = -6 \Longrightarrow x_2 = -1 \Longrightarrow x_1 = 9$$

即原方程组的解为$(9, -1, -6)$.

消元法实际上就是反复对方程组进行变换，而所作的变换也只是由以下三种基本的变换所构成：

1. 用一非零的数乘某一方程；
2. 把一个方程的倍数加到另一个方程；
3. 互换两个方程的位置．

定义： 上述三种变换称为线性方程组的**初等变换**．

结论：初等变换总是把方程组变成**同解的方程组**．

仅对第二种初等变换来证明．

对方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \qquad (1)$$

进行第二种初等变换．为简便起见，不妨设把第二个方程的k倍加到第一个方程得到新方程组

$$\begin{cases} (a_{11}+ka_{21})x_1+(a_{12}+ka_{22})x_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})x_n=b_1+kb_2, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s, \end{cases} \qquad (2)$$

设$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是(1)的任一解．因(1)与(2)的后$s-1$个方程是一样的，所以$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$满足(2)的后s−1个方程．又$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$满足(1)的前两个方程，即

$$a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1,$$

$$a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2.$$

把第二式的两边乘以k，再与第一式相加，即为

$$(a_{11}+ka_{21})c_1+(a_{12}+ka_{22})c_2+\cdots+(a_{1n}+ka_{2n})c_n=b_1+kb_2,$$

故 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 又满足(2)的第一个方程，因而是(2)的解.

类似地可证(2)的任一解也是(1)的解.所以(1)与(2)是同解的.

对于方程组

$$\begin{cases} a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s, \end{cases} \qquad (1)$$

首先检查x_1的系数，如果x_1的系数$a_{11},a_{21},\cdots,a_{s1}$全为零，则方程组(1)对$x_1$没有任何限制，$x_1$就可以取任意值，而方程组(1)可以看作$x_2,\cdots,x_n$的方程组来解．

如果x_1的系数不全为零，则利用初等变换3，可以$a_{11}\neq 0$. 利用初等变换2，分别地把第一个方程的$-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$倍加到第i个方程(i=2, ⋯, n)．

于是方程(1)就变成

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s \end{cases} \qquad (3)$$

其中

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}, i = 2, \cdots, s, j = 2, \cdots, n.$$

这样，解方程组（1）就归结为解方程组

$$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \\ a'_{s2}x_2 + \cdots + a'_{sn}x_n = b'_s \end{cases} \qquad (4)$$

上页 下页 返回 结束

显然（4）的一个解，代入（3）的第一方程就定出x_1的值，这就得出（3）的一个解；而（3）的解显然都是（4）的解．

方程组（3）有解$\longleftrightarrow$方程（4）有解．

（3）与（1）是同解的，

方程组（1）有解$\longleftrightarrow$方程（4）有解．

对(4)再按上面的考虑进行变换，最后就得到一个**阶梯形**方程组．

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

其中$c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r$. 方程(5)中“0=0”这样一些恒等式可能不出现，也可能出现，这时去掉它们也不影响(5)的解. 而且(1)与(5)是同解的.

如(5)中有方程$0=d_{r+1}$，而$d_{r+1}\neq 0$． 此时不管$x_1,x_2,\cdots,x_n$取什么值都不能使它成为等式．故(5)无解，因而(1)无解．

当d_{r+1}为零或(5)中根本就没有“0=0”的方程时，分两种情况：

（1）$r=n$．这时阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n=d_n, \end{cases} \tag{6}$$

其中$c_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$. 由最后一个方程开始，$x_n, x_{n-1}$，$\cdots, x_1$ 的值就可以逐个地唯一地决定了．在这个情形，方程组(6)，也就是方程组(1)有唯一解．

上页 下页 返回 结束

（2）$r<n$.这时阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r, \end{cases}$$

其中$c_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n.$ 把它改写成

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n, \end{cases} \quad (7)$$

由此可见，任给$x_{r+1},\cdots,x_n$一组值，就唯一地定出$x_1,x_2,\cdots,x_n$的值，也就是定出方程组（7）的一个解 .

上页 下页 返回 结束

一般地，由（7）我们可以把$x_1, x_2, \cdots, x_r$通过$x_{r+1}, \cdots, x_n$表示出来，这样一组表达式称为方程组(1)的**一组解**．而$x_{r+1}, \cdots, x_n$称为一组**自由未知量**．

例2 解方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_2 - 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$

解： 用初等变换消去x_1，得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_3 = 2, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

再施行一次初等变换，得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = -2. \end{cases}$$

改写一下，

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1 + x_2, \\ \qquad x_3 = -2. \end{cases}$$

最后得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(7 + x_2), \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

这就是原方程组的一般解，其中x_2为自由未知量．

从上例可以看出，一般线性方程组化成阶梯形，不一定就是(5)的形式，但是只要把方程组中某些项调动一下，总可以化成(5) 的形式 .

注 $r > n$的情形是不可能出现的 .

用消元法解线性方程组的整个过程．即

1. 用初等变换化线性方程组为阶梯形方程组；

2. 把最后的一些恒等式“0=0”(如果出现的话)去掉；

3. 如果剩下的方程当中最后的一个等式是零等于一非零的数，则方程组无解，否则有解，转4；

4. 如果阶梯形方程组中的方程的个数 r 等于未知量的个数，则方程组有唯一的解；

如果阶梯形方程组中方程的个数 r 小于未知量的个数，则方程组有无穷多个解．

定理1

在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases}$$

中，如果 $r < s$，则它必有非零解．

证明： 显然，方程组在化成阶梯形方程组之后，方程的个数不会超过原方程组中方程的个数，即

$$r \leq s < n.$$

由$r < n$可知，它的解不唯一，因而必由有非零解．

矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

称为线性方程组(1)的**增广矩阵**.

用初等变换化增广矩阵成阶梯形矩阵.

而从化成的阶梯形矩阵就可以判别方程组有解还是无解，在有解的情形，回到阶梯形方程组去解.

例3 解

$$\begin{cases} 2x_1 \ -x_2 \ +3x_3 = 1, \\ 4x_2 -2x_2 +5x_3 = 4, \\ 2x_1 \ -x_2 \ +4x_3 = 0. \end{cases}$$

解： 对它的增广矩阵作初等行变换，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+①\times(-1)]{②+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从最后一行$(0, 0, 0, 1)$可以看出原方程组无解.

§2 n维向量空间

引例1

一个n元方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

可用n+1个有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)$$

来表示 .

定义2

所谓数域 P上一个n**维向量**就是由数域 P中n个数组成的有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

a_i称为向量的分量.

用 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 来表示向量.

定义3

如果n维向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

的对应分量都相等，即

$$a_i=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

就称这两个向量是**相等的**，记作$\alpha=\beta$.

定义4 （加法，和）

向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的**和**，

$$\gamma=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

记为$\gamma=\alpha+\beta$.

加法的运算性质：

交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha.$

结合律 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma.$

零向量 $(0,0,\cdots,0)$

负向量 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

记为$-\alpha.$

显然，对于所有的α，都有

$$\alpha+0=\alpha,$$

$$\alpha+(-\alpha)=0.$$

加法的四条基本运算规律

交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha.$

结合律 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma.$

存在零向量 $\alpha+0=0,$

存在负向量 $\alpha+(-\alpha)=0.$

定义6 (减法)

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

定义6 （数量乘法）

设k为数域P中的数，向量

$$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

称为向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$与数$k$的**数量乘积**，记为$k\alpha$.

数量乘法的两条基本运算规律

$$\begin{cases} k(l\alpha) = (kl)\alpha, \\ 1\alpha = \alpha \end{cases}$$

加法与数乘的两个分配律

$$\begin{cases} k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \\ (k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha. \end{cases}$$

由上述八条运算性质不难验证：

$$0\alpha = 0,$$
$$(-1)\alpha = -\alpha,$$
$$k0 = 0.$$
$$k\alpha = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ 或 } \alpha = 0.$$

定义6 （向量空间）

以数域 P中的数作为分量的 n维向量的全体，同时考虑到定义在它们上面的加法和数量乘法，称为数域 P上的n**维向量空间**.

定义6 （向量空间）

以数域 P 中的数作为分量的 n 维向量的全体，同时考虑到定义在它们上面的加法和数量乘法，称为数域 P 上的 n **维向量空间**．

加法的四条基本运算规律

交换律 $\alpha+\beta=\beta+\alpha.$

结合律 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma.$

单位性 $\alpha+0=\alpha,$

存在负向量 $\alpha+(-\alpha)=0.$

数量乘法的两条本运算规律

结合律 $k(l\alpha)=(kl)\alpha,$

单位性 $1\alpha=\alpha$

加法与数乘的两个分配律

$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta,$

$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha.$

行向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

列向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$

§3 线性相关性

定义

所谓向量α与β **成比例**就是说有一数k使

$$\alpha = k\beta.$$

定义9（线性组合）

向量α称为向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的一个**线性组合**，如果有数域$P$中的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s.$$

也称向量α可经向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$**线性表出**.

例1

$$\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(4,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1)$$

由 $\alpha_3=3\alpha_1-\alpha_2$ 可知，α_3 为 α_1 和 α_2 的一个线性组合 .

例2 零向量是任一向量组的线性组合 .

命题1

任一个n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$都是向量组

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\\ \varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\\ \cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)\end{cases}$$

的一个线性组合.

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n.$$

向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$称为$n$**维单位向量**.

例3 判断 $\beta=(4,\ 3,\ 0,\ 11)$ 是否为向量组 $\alpha_1=(1,\ 2,\ -1,\ 5)$，$\alpha_2=(2,\ -1,\ 1,\ 1)$ 的线性组合.

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\beta$,

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^T & \alpha_2^T & \beta^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 5 & 1 & 11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & -9 & -9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ β 不能由 α_1，α_2 线性表示.

定义10（线性表出）

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$中每一个向量$\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$都可以经向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$就称为可以经向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$**线性表出**.如果两个向量组互相可以线性表出，它们就称为**等价**.

例如

$$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,2,0)$$
$$\beta_1=(1,0,2),\beta_2=(0,1,-1)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\alpha_1=\beta_1+\beta_2,\alpha_2=\beta_1+2\beta_2,\\&\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2\end{aligned}}$$

则向量组α_1,α_2与向量β_1,β_2等价 .

命题2

向量组之间的等价有以下性质：

1）**反身性**：每一个向量组都与它自身等价；

2）**对称性**：

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$等价，则向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价；

3）**传递性**：

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$等价，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$与$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$等价，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$等价．

定义11

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$中有一个向量可以由其余的向量线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$称为**线性相关的**.

例如

$\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(4,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1)$

是线性相关的，因为$\alpha_3=3\alpha_1-\alpha_2$.

定义11'

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 1)$ 称为**线性相关**的，如果有数域P中不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

° 帜搏11 $\Rightarrow$ 帜搏11′

□榴□□$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$赅帜搏11蟾□忸□哄□ 则其中有一个向量$\alpha_i$ 可由其余向量线性表出，即存在 $k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n$,登峒

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_n\alpha_n .$$

于是

不等于0

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + \boxed{(-1)}\alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_n\alpha_n = 0.$$

辣$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$赅帜搏11′蟾□忸□哄□.

° 帜搏11′ $\Rightarrow$ 帜搏11

□榴□□$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$赅帜搏11′蟾□忸□哄□ 则存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

设 $k_i\neq 0$, 则

$$-k_i\alpha_i=k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_n\alpha_n$$

于是

$$\alpha_i=(-\frac{k_1}{k_i})\alpha_1+\cdots+(-\frac{k_{i-1}}{k_i})\alpha_{i-1}+(-\frac{k_{i+1}}{k_i})\alpha_{i+1}+\cdots+(-\frac{k_n}{k_i})\alpha_n$$

辣 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$赅帜搏11蟾□忸□哄□.

注1 任意一个包含零向量的向量组必是线性相关的．

注2 非零向量组 α_1, α_2 线性相关就表示

$$\alpha_1 = k\alpha_2 \text{ 或者 } \alpha_2 = l\alpha_1,$$

注3 由一个向量组成的向量组α_1线性相关当且仅当 $\alpha_1 = 0$.

定义12

一向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$ **不线性相关**，即没有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

就称为**线性无关**；

一向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$ 称为**线性无关**，如果由

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

可以推出

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0.$$

例如

由n维单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 组成的向量组是线性无关的．

事实上，若

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0,$$

则

$$k_1(1,0,\cdots,0)+k_2(0,1,\cdots,0)+\cdots+k_n(0,0,\cdots,1)$$

$$=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$$

$$=(0,0,\cdots,0),$$

从而有$k_1=k_2=\cdots=k_s=0.$

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$

试讨论它们的线性相关性。

$$\left|\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\0 & -1 & 3\\-1 & 2 & -5\end{vmatrix}=0$$

方程组有非零解（1,1,3），线性相关。

上页 下页 返回 结束

练习:

判断向量$\alpha_1=(1,-1,3),\alpha_2=(2,-1,4),\alpha_3=(3,-4,11)\ \alpha_4=(4,-2,8)$的线性相关性

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故线性相关

命题3

如果一向量组的一部分线性相关，则这个向量组线性相关．

如果一向量组线性无关，则它的任何一部分线性无关．

证明: 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的一部分 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ $(s\le r)$ 线性相关，则存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

令 $k_{s+1}=\cdots=k_r=0$，则

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+k_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+k_r\alpha_r=0.$$

因为$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零，所以 $k_1,\cdots,k_s,k_{s+1},\cdots,k_r$ 也不全为零，因而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关.

后一个命题是前一个的逆否命题，用反证法和前面的结论很容易就能证明.

判断一个向量组是线性相关还是线性无关

命题4

向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

线性无关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases}$$

只有零解 .

证明：

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

$$\Leftrightarrow \quad x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$$

只有非零解．按分量写出来就是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases}$$

只有零解．

推论1

向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

线性相关的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{sn}x_s = 0 \end{cases}$$

有非零解 .

推论2

若向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

线性无关，则在每一个向量上添一个分量所得到的

n+1维的向量组

$$\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, a_{i,n+1}), \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

也线性无关 .

证明： 与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$相对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{sn}x_s = 0, \\ \boxed{a_{1,n+1}x_1 + a_{2,n+1}x_2 + \cdots + a_{s,n+1}x_s = 0,} \end{cases}$$

多出来的方程

方程组（6）的解全是方程组（4），如果（4）只有零解，则方程组（6）也只有零解．

注 上述结论显然可以推广到添几个分量的情形．

与推论2等价的一个命题为

若向量组

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,s,$$

线性相关，则

$$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i,n-1}),r\le n,i=1,2,\cdots,s,$$

也线性相关．

显然，上述结论也可以推广到减少几个分量的情形．

定理2

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是两个向量组，如果

1）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以经$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，

2）$r>s$，

则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 必线性相关 .

证明： 由1）有

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{s}t_{ji}\beta_j,\quad i=1,2,\cdots,r.$$

为考察$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性相关性，设

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r = 0.$$

若要证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性相关，即要找出一组不全为零的** $x_1,x_2,\cdots,x_r$ **使上式成立**.

若要证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性无关，即要由上式证明必有**$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

于是 $\sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{r} x_i \sum_{j=1}^{s} t_{ji}\beta_j = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} t_{ji}x_i\beta_j$

$$= \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{s} t_{ji}x_i\right)\beta_j$$

若能找到不全为零的$x_1,x_2,\cdots,x_r$使$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的系数全为零，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关。为此令

$$\sum_{j=1}^{s} t_{ji}x_i = 0,$$

$$
\begin{cases}
t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1r}x_r = 0, \\
t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2r}x_r = 0, \\
\cdots\cdots\cdots \\
t_{s1}x_1 + t_{s2}x_2 + \cdots + t_{sr}x_r = 0,
\end{cases}
$$

由2）知，$s < r$，即方程的个数小于未知量的个数，

故上述方程有非零解$k_1, k_2, \cdots, k_s$，从而有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0.$$

由此可知，向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性相关 .

推论1 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可以经向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，则$r \le s$.

证明：（反证法与定理2即得.）

推论2 任意$n+1$个n维向量必线性相关.

证明： 因为任意一个n维向量都可以被n维单位向量

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表出，且$n+1>n$，因而必线性相关.

推论3 两个线性无关的等价的向量组，必含有相同个数的向量.

性质总结

(1) 零向量可由任何同维向量组线性表示；

(2) 含有零向量的向量组线性相关；

(3) 任意n维向量可由n维单位坐标向量组线性表示；

(4) n维单位坐标向量组线性无关；

n维单位坐标向量组：

$$e_1=(1,0,\cdots,0)^T$$
$$e_2=(0,1,\cdots,0)^T$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,0,\cdots,1)^T$$

(5) 一个向量线性无关的充分必要条件是该向量为非零向量；

(6) 两个向量线性无关的充分必要条件是两个向量的对应分量不成比例；

(7) n个n维向量 $\alpha_i=\left(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\right)^T\ (i=1,2,\cdots,n)$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

(8) 任意m个n维向量，如果$m>n$，则必线性相关；

(9) 向量组中的任何一个向量可由该向量组线性表示；

(10) 若向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中的一部分向量线性表示，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示.

(11) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，且

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m$$

$$\beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mm}\alpha_m$$

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 也线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

(12) 设n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_m(m>s)$ 也线性相关(部分相关则整体相关；反之，整体无关则部分无关)；

(13) 设k维向量组 $(\mathrm{I})\ \alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik})$

s 维向量组 $(\mathrm{II})\ \beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik},a_{ik+1},\cdots a_{is})$

若向量组 (I) 线性无关，则添加一些分量后的向量组 (II)也线性无关；

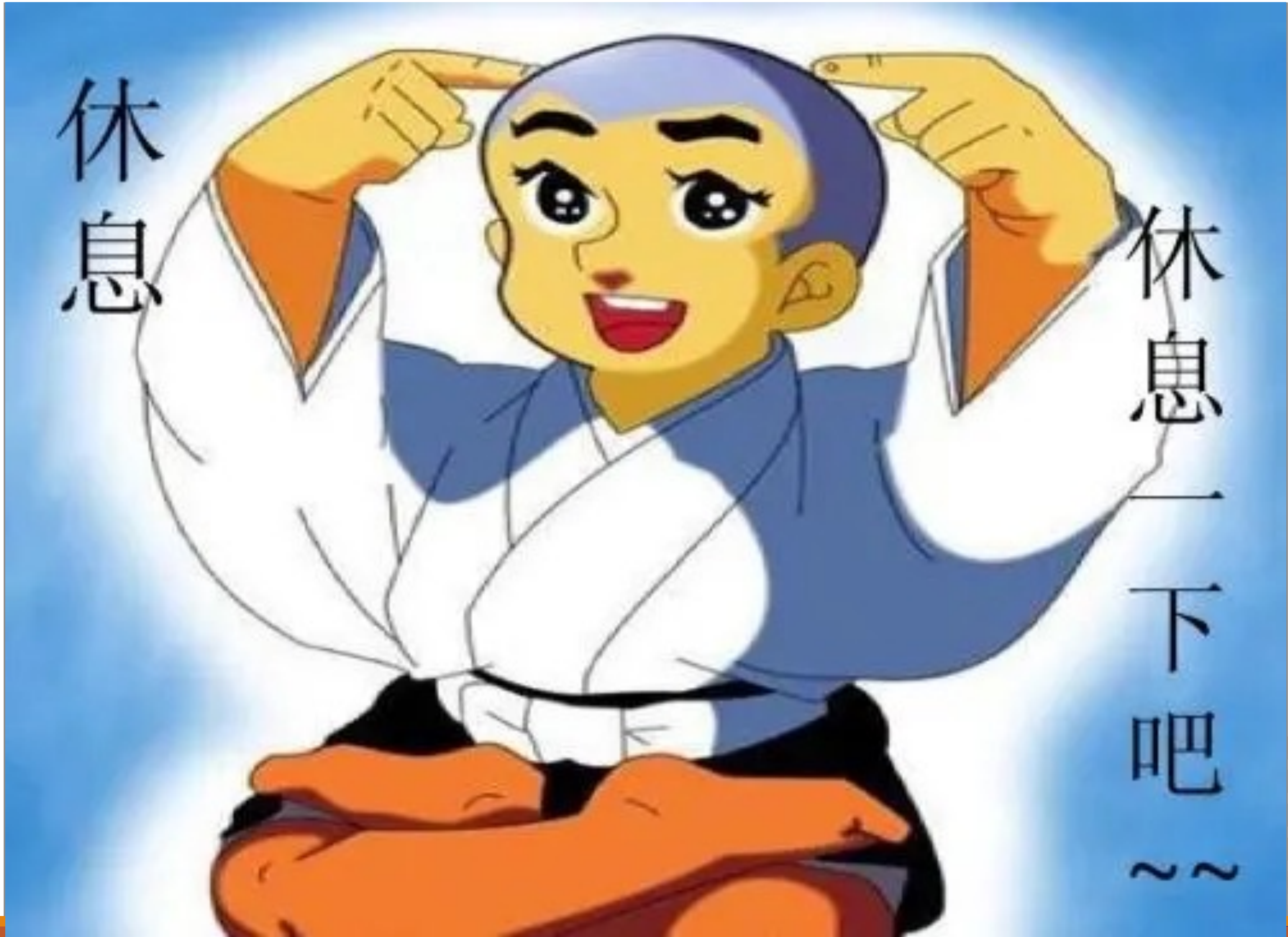
（14） n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可以由其余$m-1$个向量线性表示；

（15） n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ β线性相关，则β 可由

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，且表示法唯一；

(16) 若向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则表示法唯一的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；


休息
休息一下吧~~

定义13

一向量组的一个部分组称为一个**极大线性无关组**，如果这个部分组本身是线性无关的，并且从这向量组中任意添一个向量（如果还有的话，所得的部分向量组都线性相关.

例如 在向量组

$$\alpha_1=(2,-1,3,1),\alpha_2=(4,-2,5,4),\alpha_3=(2,-1,4,-1),$$

中，□α_1,α_2组成的部分组就是一个极大线性无关组.

事实上，α_1,α_2线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

类似可知，α_2,α_3也是一个极大线性无关组.

注1

向量组的极大线性无关组不一定是唯一的，这就是为什么称“极大”，而不称为“最大”的原因．

注2

一个线性无关的向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身．

命题 (极大线性无关组的基本性质)

任意一个极大线性无关组都与向量组等价.

推论

一向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的.

定理3

一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量.

定义14

向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的**秩**．

注 全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组，规定这样的向量组的**秩为零**．

命题1 一向量组线性无关的充分必要条件为它秩等于它所含向量的个数．

命题2 等价的向量组必有相同的秩．

利用向量组讨论方程组

给定一个方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = d_1, & (A_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = d_2, & (A_2) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = d_s, & (A_s) \end{cases}$$

各个方程所对应的向量分别为

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, d_1),$$

$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, d_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_s = (a_{s1}, a_{s2}, \cdots, a_{sn}, d_s).$$

设有另一个方程

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d, \qquad (B)$$

它所对应的向量为$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n, d)$.

则β为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合，即

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s,$$

$\Leftrightarrow$

$$B = l_1(A_1) + l_2(A_2) + \cdots + l_s(A_s)$$

即方程(B)是方程$(A_1), (A_2), \cdots, (A_s)$ 的线性组合 .

容易验证，方程组$(A_1), (A_2), \cdots, (A_s)$ 的解一定满足(B).

进一步设方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1, & (B_1) \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2, & (B_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \cdots + b_{rn}x_n = c_r, & (B_r) \end{cases}$$

它的方程所对应的向量为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$.

若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可经$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，则方程$(A_1),(A_2),\cdots,(A_s)$的解是方程组$(B_1),(B_2),\cdots,(B_r)$的解 .

再进一步，当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$等价时，两个方程组同解 .

例 $\alpha_1 =$ ˚0 ! 1 ； $\alpha_2 =$ ˚1 ! 0 `! $\alpha_3 =$ ˚1 ! 1 ` ! $\alpha_4 =$ ˚0 ! 2

易证 α_1, α_2 线性无关，

又任何3个二维向量组必线性相关，

故 α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组.

同样 α_2, α_3 也是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组.

例: 1)求向量 $\alpha_1=(1,-1,3),\alpha_2=(2,-1,4),\alpha_3=(3,-4,11)$

$\alpha_4=(4,-2,8)$ 的秩及极大无关组,

$$\text{解:}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-1&-4&-2\\3&4&11&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&2\\0&-2&2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以秩为2, 极大无关组为 α_1,α_2(瑭α_1,α_3;瑭α_1,α_4)

2)把其余向量用该极大无关组表出.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-1&-4\\3&4&11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$5\alpha_1-\alpha_2=\alpha_3$$

1. 稼糖彼纪榴□□□□哄忸

(I) $\alpha_1=(3,-1,2),\alpha_2=(1,-5,7),\alpha_3=(7,-13,20),\alpha_4=(-2,6,1).$

(II) $\alpha_1=(2,4,1,1,0),\alpha_2=(1,-2,0,1,1),\alpha_3=(1,3,1,0,1).$

□ (I) 蟾4标3□榴□ ！□哄 Y

(II)□令3标技□□瑁□□纪唣蓖柄□ ！□榴□蚯哄 ！□榴□擦蚯哄.

2. t柄贷啡蜉 ！

°1 `$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$□忸□哄 ！薛□及□□唣丶

°2 `$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$□忸蚯哄 Y

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$$

□ $|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|=t-5$ Y

$t=5$蜉 ！□哄 ！ $-\alpha_1+2\alpha_2=\alpha_3$

$t\neq 5$蜉 ！□哄 Y

例:判断下列向量组是否线性相关, 并求出极大线性无关组?

1、$\alpha_1=(2,\ -1,\ 3,\ 1)$, $\alpha_2=(4,\ -2,\ 5,\ 4)$,

$\alpha_3=(2,\ -1,\ 2,\ 3)$, $\alpha_4=(-3,\ 2,\ -1,\ -2)$;

对矩阵$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$施以初等变换化为阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以秩$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)=3<4$, 所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

上页 下页 返回 结束

2、$\alpha_1=(1,\ -2,\ 0,\ 3)$, $\alpha_2=(2,\ 5,\ -1,\ 10)$, $\alpha_3=(3,\ 4,\ 1,\ 2)$.

$$\left(\alpha_1^T,\ \alpha_2^T,\ \alpha_3^T\right)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&5&4\\0&-1&1\\3&10&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&9&10\\0&-1&1\\0&4&-7\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&19\\0&-1&1\\0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&0&19\\0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r\left(\alpha_1^T,\ \alpha_2^T,\ \alpha_3^T\right)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

§4 矩阵的秩

定义15

所谓矩阵的**行秩**就是指矩阵的行向量组的秩；

所谓矩阵的**列秩**就是指矩阵的列向量组的秩；

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\alpha_1 \\
\alpha_2 \\
\vdots \\
\alpha_m
\end{array}
\\
\begin{array}{cccc}
\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n
\end{array}
\end{array}
$$

m个n维行向量

n个m维列向量

例如 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行向量组

$$\alpha_1=(1,1,3,1),\alpha_2=(0,2,-1,4),\ \ \alpha_3=(0,0,0,5),\alpha_4=(0,0,0,0).$$

容易验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是它的一极大无关组，

故A的行秩为3 .

列向量组

$$\beta_1=(1,0,0,0),\beta_2=(1,2,0,0),\beta_3=(3,-1,0,0),\beta_4=(1,4,5,0).$$

容易验证β_1,β_2,β_4是它的一极大无关组，

故A的列秩也为3 .

引理

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的行秩 $r < n$，则它有非零解 .

证明:

设矩阵A的行向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 因为它的秩为$r$，所有极大线性无关组由$r$个向量组成, 不妨设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一个极大线性无关组．则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价，故方程组（1）与方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

同解．又因为对于方程组(2)，方程个数 r 小于未知量的个数n，所有有非零解．从而方程组(1)有非零解．

定理4

矩阵的行秩与列秩相等．

证明:

设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

的行秩$=r$, 列秩 $=r_1$.

先证 $r \le r_1$.

设矩阵A的行向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，不失一般性，设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为它的一个极大线性无关组.

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是线性无关的，所以方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_r\alpha_r = 0$$

只有零解，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{r1}x_r = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{r2}x_r = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{rn}x_r = 0 \end{cases}$$

只有零解.

由引理，上述方程组的系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

的行秩≥r． 于是可以在它的行向量中可以找到 r个是线性无关的，不妨设为

$$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{r1}),\ (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{r2}),\ \ldots,\ (a_{1r}, a_{2r}, \cdots, a_{rr}).$$

因为它们是线性无关的，所以在这些向量上添几个分量后所得的向量组

上页 下页 返回 结束

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

$$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{r1}, \cdots, a_{s1}),$$

$$(a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{r2}, \cdots a_{s2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_{1r}, a_{2r}, \cdots, a_{rr}, \cdots, a_{sr})$$

也线性无关．它们正好是矩阵A的r个列向量，由它们的线性无关性可知矩阵A的列秩 $r_1 \geq r$.

同理可证 $r_1 \leq r$.

综上所述可知，$r = r_1$.

因为矩阵的行秩等于列秩，统称为**矩阵的秩**．记为秩(A)，或 $r(A)$, $\mathrm{rank}(A)$.

定理5

$n\times n$矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式为零的充分必要条件是 A的秩小于 n .

证明：　(充分性)

设 $\mathrm{rank}(A) < n$，则 A的n个行向量组线性相关 .

当 n=1时，A只有一个数，即只有一个一维向量.而它又是线性相关的向量组，故即为零向量，从而

$$|A| = |0| = 0.$$

当 $n>1$时，矩阵A中有一行是其余各行的线性组合. 从这一行依次减去其余各行的相应的倍数，这一行就全变成零，由行列式的性质可知

$$|A|=0.$$

(必要性) 对n作数学归纳法 .

当$n=1$ 时，由$|A|=0$可知A的仅有的一个元素就是零，因而 A的秩为$0<1$.

假设结论对$n-1$及矩阵已证，现在来看n级矩阵的情形 .

记 A的行向量组为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,

若A的第一列的元素$a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}$ 全为零，则 A的列向量组中含有零向量，故列向量组线性相关,

从而$r(A)$=列秩$< n$.

若A的第一列的元素有一个不为零，不失一般性，设$a_{11}\neq 0$. 将第一行的$(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}})$倍加到第$i$行$(2\le i\le n)$，则从第二行直到第$n$行的第一个元素$a_{21},\cdots,a_{n1}$全变为零 .

即得

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $(0,a'_{i2},\cdots,a'_{in})=\alpha_i-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\alpha_1, i=2,\cdots,n.$

由$|A|=0$可知$n-1$级矩阵

$$\begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式为零．根据归纳假设，这个矩阵的行向量线性相关，因而向量组

$$\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1,\cdots,\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1$$

线性相关，即存在不全为零的数$k_2,\cdots,k_n$使

$$k_2(\alpha_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}\alpha_1)+\cdots k_n(\alpha_n-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\alpha_1)=0,$$

即 $$-(\frac{a_{21}}{a_{11}}k_2+\cdots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}k_n)\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0.$$

$-(\frac{a_{21}}{a_{11}}k_2+\cdots+\frac{a_{n1}}{a_{11}}k_n),k_2,\cdots,k_n$ 这组数显然也不全为零，从而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关， 故秩小于 n .

根据归纳法原理， 必要性得证 .

推论

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是它的系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

证明： $(\Leftarrow)$ 由定理5及引理立知 .

$(\Rightarrow)$ 由Cramer法则立知 .

定义16

在一个$s \times n$矩阵A中任意选定k行和k列，位于这些选定的行与列的交点上的k^2个元素按原来的次序所组成的k级行列式，称为A的一个k级子式．

注1 $k \le \min(s, n)$,

其中$\min(s, n)$表示s, n中较小的一个．

注2 k级子式是一个行列式，一个数，并不是一个矩阵

·**思考** $s \times n$矩阵中有几个k级子式？

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} \phantom{a_{11}} & & j_1\text{列} & & j_2\text{列} & \cdots & j_k\text{列} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i_1\text{行} \\ \\ i_2\text{行} \\ \\ i_k\text{行} \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_k} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i_11} & \cdots & \boxed{a_{i_1j_1}} & \cdots & \boxed{a_{i_1j_2}} & \cdots & \boxed{a_{i_1j_k}} & \cdots & a_{i_1n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i_21} & \cdots & \boxed{a_{i_2j_1}} & \cdots & \boxed{a_{i_2j_2}} & \cdots & \boxed{a_{i_2j_k}} & \cdots & a_{i_2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i_k1} & \cdots & \boxed{a_{i_kj_1}} & \cdots & \boxed{a_{i_kj_2}} & \cdots & \boxed{a_{i_kj_k}} & \cdots & a_{i_kn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{s1} & \cdots & a_{sj_1} & \cdots & a_{sj_2} & \cdots & a_{sj_k} & \cdots & a_{sn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le s, 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$$

k级子式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & & a_{i_2 j_k} \\ & & & \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

例如 在矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

中选第1, 3行和第3, 4列， 它们交点上的元素所成的2级行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=15$$

就是一个二级子式 .

又如选的第1,2,3行和第1,2,4列， 相应的3级子式即为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=10.$$

定理6

一矩阵的秩为r的充分必要条件为矩阵中有一个r级子式不为零，且所有 $r+1$级子式全为零.

注 上述定理也可作为矩阵秩的另一种定义.

证明: $(\Rightarrow)$

设矩阵的秩为r. 此时由定理2可知矩阵的任一个$r+1$个行向量都线性相关, 矩阵A的任意 $r+1$级子式的的行向量也线性相关. 由定理5，这种子式全为零.

上页 下页 返回 结束

下证矩阵A中至少有一个r级子式不为零．

因为A的秩为r，所以在A中有r个行向量线性无关，不妨设前 r个行向量线性无关，把这 r行取出来．作一矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

显然矩阵A_1的行秩为r，因而它的列秩也是r，即A_1中有r列线性无关．不妨设前r列线性无关，故行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

它就是矩阵A中一个r级子式．必要性得证．

$(\Leftarrow)$

设在矩阵A中有一 r级子式不为零，而所有$r+1$级子式全为零．下证 $r(A)=r$．

由行列式按一行展开的公式可知，若A的$r+1$级子式全为零，在A的所有$r+2$级子式也一定为零，从而A的所有级数大于r的子式全为零．

设 A的秩为t．

一方面，$t\geq r$．

事实上，若$r>t$，则 $r\geq t+1$， 由必要性可知，矩阵A的所有r级子式全为零，矛盾．

另一方面，$t \le r$.

事实上，若$t > r$ ，则 $t \ge r+1$ ， 故矩阵A中所有t级子式全为零 . 这与由必要性可知 A中有一t级子式不为零矛盾 .

综上所述，$t = r$.

注 上述定理包含两个部分：

1）$r(A) \ge r \Leftrightarrow$ A有一个 r 级子式不为零；

2）$r(A) \le r \Leftrightarrow$ A的所有 $r+1$ 级子式全为零 .

计算矩阵秩的方法

1. 将矩阵作初等**行**变换，把矩阵化成阶梯形；

（初等行变换将矩阵的行向量组变成一个与之等价的向量组．又等价的向量组有相同的秩，所以**初等行变换不改变矩阵的秩**，同样地，**初等列变换也不改变矩阵的秩**．）

2. 由1，问题转化为求阶梯形矩阵的秩．而阶梯形矩阵的秩就等于其中非零的行的数目．

事实上，设A为一阶梯形矩阵，不为零的行数为r，因为初等列变换不改变矩阵的秩，所以适当变换列

的顺序，不妨设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中$a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,r$. 显然，$A$的左上角的$r$级子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{rr}\neq 0.$$

而它的任一$r+1$级子式至少有一行全为零，故所有$r+1$级子式全为零．因此，A的秩为r．

上页 下页 返回 结束

求矩阵的秩

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

r=3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

r=5

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

r=2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

r=4

用k阶子式求矩阵的秩

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0, r = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27,$ 栌踔4□肇咆黑柄0 ！$r = 3$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}, n>2,$$ □r(A)丶

□中$|A|=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$

嘀$|A|\neq 0$ (a $\neq (1-n)b$ 痹 $a\neq b$ 蜉 ！$r(A)=n$

嘀$|A|=0$蜉 ！

°1 `a=b=0蜉 !A=0 ！r(A)=0

(2) a=b$\neq$0蜉 ！ $A=\begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}, r(A)=1$

(3) $a=(1-n)b$, A□茚笔□□n-1□肇咆柄$(a+(n-2)b)(a-b)^{n-2}\neq 0$ ！$r(A)=n-1$

例: 求向量 $\alpha_1=(1,-1,3),\alpha_2=(2,-1,4),\alpha_3=(3,-4,11)$

$\alpha_4=(4,-2,8)$ 的秩及极大无关组,

解: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以秩为2, 极大无关组为 α_1,α_2(瑭α_1,α_3;瑭α_1,α_4)

2)把其余向量用该极大无关组表出.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3=5\alpha_1-\alpha_2$$
$$\alpha_4=2\alpha_2$$

例: 求向量组秩及极大无关组,并把其余向量用该极大无关组表出.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&0&2\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\alpha_5=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-2\alpha_4$$

例: 求向量组的秩及极大无关组,并把其余向量用该极大无关组表出.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\\2\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-4\\8\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1&2&1\\0&-1&-3&-1&-4\\1&1&4&4&8\\0&2&6&2&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&3&0&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$r=3$$

$$\alpha_3=\alpha_1+3\alpha_2$$

$$\alpha_5=\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_4$$

苘□变□榴□□︹(I) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\end{pmatrix}$,

(II) $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\a+3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\1\\a+6\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\a+4\end{pmatrix}$, a 柄贷啡蜉(I)蔽(II)□维～

□︹鲶□榴□□(III) : $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$.

(I)蔽(III)□维, 辣□□$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

(II)蔽(III)□维, 辣□□$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$$

$a=-1$蜉 ！$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$

$a\neq-1$蜉 ！$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$

$$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-3&-3\\0&-a&-a-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\0&a&a+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&1&a&a+1&a+2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{pmatrix}$$

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$$

$a\neq-1$蜉 ！$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$

命题7

$$\text{秩}(A+B)\leq\text{秩}(A)+\text{秩}(B).$$

证明:

设A, B为$m\times n$矩阵，秩$(A)=r$，秩$(B)=s$.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为矩阵A的行向量组，$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r}$ 为它的极大无关组，$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$ 为矩阵B的行向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的极大无关组，则

$$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m$$

为矩阵$A+B$的行向量组.

显然$\alpha_i+\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$ 可由$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$线性表出，

故它的极大无关组也可由$\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_r},\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_s}$线性表出，即

$$\text{秩}(A+B)\le r+s.$$

$$\text{秩}(A+B)\le\text{秩}(A)+\text{秩}(B).$$

定理8

设A是数域P上$n\times m$矩阵，B是数域P上$m\times s$矩阵，则

$$\text{秩}(AB)\le\min[\text{秩}(A),\ \text{秩}(B)], \tag{2}$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

证明： 先证秩$(AB)\le$秩(B).

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{matrix}.$$

令$B_1, B_2, \cdots, B_m$表示B的行向量，$C_1, C_2, \cdots, C_n$表示AB的行向量，所以

$$C_i = a_{i1}B_1 + a_{i2}B_2 + \cdots + a_{im}B_m \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

从而AB的行向量组$C_1, C_2, \cdots, C_n$可经B的行向量组线性表出. 于是 AB的秩不超过B的秩，即

$$秩(AB) \leq 秩(B).$$

再证秩$(AB)\leq$秩(A).

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & & A_m \end{array}$$

令$A_1, A_2, \cdots, A_m$表示A的列向量, $D_1, D_2, \cdots, D_m$表示AB的列向量，与上述证明类似可知，

$$D_i = b_{1i}A_1 + b_{2i}A_2 + \cdots + b_{mi}A_m \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

即矩阵 AB 的列向量组可以经矩阵A的列向量组线性表出，因而前者的秩不超过后者的秩，即

秩$(AB)\leq$秩(A).

综上所述，

$$秩(AB)\le秩(A)，且秩(AB)\le秩(B)，$$

从而

$$秩(AB)\le\min[秩(A), 秩(B)].$$

推论

设 $A=A_1 A_2 \cdots ,A_m$，则

$$\square(A) \le \min_{1\le j\le t}\square(A_j).$$

定理9

A是一个$s\times n$矩阵，如果P是$s\times s$可逆矩阵，Q是$n\times n$可逆矩阵，则

$$秩(A)=秩(PA)=秩(AQ).$$

证明:

令

$$B=PA,$$

由定理2，

$$\square(B)\le\square(A);$$

但是由$A=P^{-1}B$, 又有$\square(A)\le\square(B)$.

所以秩$(A)=$秩$(B)=$秩(PA).

类似可证第二个等式.

定理10

任意一个$s \times n$矩阵 A都与一形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

r个1

$r =$ 秩(A)

的矩阵等价，它称为矩阵A的**标准形** 主对角线上 1 的个数等于A的秩。

证明:

若 $A=O$，则它已经是标准形了。

以下不妨设$A\neq O$。经过初等变换，A一定可以变成一左上角元素不为零的矩阵。

当$a_{11}\neq 0$时，把其余的行减去第一行的 $a_{11}^{-1}a_{i1}$ $(i=2,3,\cdots,s)$倍，其余的列减去第一列的$a_{11}^{-1}a_{1j}$ $(j=2,3,\cdots,n)$倍。然后用a_{11}^{-1} 乘第一行，A就变成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

A_1是一个$(s-1)\times(n-1)$的矩阵。对 A_1再重复以上的步骤。 这样继续下去就可得出所要的标准形。

显然，标准形矩阵的秩就等于它主对角线上的1的个数。而初等矩阵不改变矩阵的秩，所以1的个数也就是矩阵 A的秩。

注 用分块矩阵可写成，A的标准形为

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(s-r)\times r} & O_{(s-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

§5 线性方程组有解判别定理

设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

引入向量

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \ \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}. \tag{2}$$

于是线性方程组(1)可以改写成向量方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0. \tag{3}$$

上页 下页 返回 结束

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0.$$

显然，线性方程组(1)有解

$\Leftrightarrow$ 向量 β 可以表成向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合.

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 等价.

定理11 （线性方程组有解判别定理）

线性方程组(1)有解的充分必要条件为它的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \text{与} \ \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

有相同的秩．

证明：

线性方程组(1)有解

$\Leftrightarrow$ 向量 β 可以表成向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合.

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 等价 .

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 有相同的秩 .

$\Rightarrow$ **显然**

$\Leftarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **的极大无关组也是** $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ **的极大无关组**

$\Leftrightarrow$ 矩阵 A与矩阵$\bar{A}$ 有相同的秩 .

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **为** A**的列向量组，**

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ **为** $\bar{A}$ **的列向量组**

注 上述判别条件与消元法是一致的.

用消元法解线性方程组(1)的第一步就是用初等行变换把增广矩阵 $\bar{A}$ 化成阶梯形．这个阶梯形在适当的**调动前n列的顺序**之后有下面两种情形:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{d_{r+1} \neq 0}$

其中$c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r, d_{r+1} \neq 0.$

对于前一种情形，原方程无解．

对于后一种情形，原方程有解．

A的阶梯形

$$\bar{A} \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ d_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(\bar{A}) \Leftrightarrow d_{r+1} = 0 \Leftrightarrow$ **线性方程组(1)有解**

注

对线性方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换，得矩阵 $\bar{B}$, 则以 $\bar{B}$ 为增广矩阵的线性方程组与原方程组同解.

调动 $\bar{A}$ 的前 n 列的顺序, 对应于原方程组调动未知量的顺序．它不会改变原方程有没有解．

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \quad & & i\text{列} & & j\text{列} & & \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \leftrightarrow & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{si} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{si} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{array} \end{array}$$

上页 下页 返回 结束

设线性方程组(1)有解，矩阵 A 与 $\overline{A}$ 的秩都等于 r，D 是矩阵 A 的一个不为零的 r 级子式，也是 $\overline{A}$ 的一个不为零的子式．为了方便起见，不妨设 D 为位于 A 的左上角．

显然，在这种情况下，$\overline{A}$ 的前 r 行就是一个极大线性无关组，第 $r+1, \cdots, s$ 行都可以经它们线性表出．

因此，方程组（1）与

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \qquad (4)$$

同解．

当 $r=n$时，由克拉默法则，方程组(4)有唯一解，也就是方程组(1)有唯一解．

当 $r<n$时，将方程组(4)改写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n, \end{cases} \tag{5}$$

(5)作为$x_1,\cdots,x_r$的一个方程组，它的系数行列式$D\neq0$. 由克拉默法则，对应$x_{r+1},\cdots,x_n$的任意一组值，方程组(5)，也就是方程组(1)，都有唯一解． $x_{r+1},\cdots,x_n$是方程组(1)的一组自由未知量．

对(5)用克拉默法则，可以解出

$$\begin{cases} x_1 = d_1' + c_{1,r+1}' x_{r+1} + \cdots + c_{1n}' x_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_r = d_r' + c_{r,r+1}' x_{r+1} + \cdots + c_{rn}' x_n. \end{cases} \quad (6)$$

(6)就是方程组(1)的一般解．

线性方程组的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases}$$

1. r(A)=n 只有零解
2. r(A)<n 有无穷组解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases}$$

1. $r(A) \neq r(\overline{A})$, 蚯□丶
2. $r(A) = r(\overline{A}) = n$, 踔蘖崩□丶
3. $r(A) = r(\overline{A}) \neq n$, 踔蚯□□□丶

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ ax_1+bx_2+cx_3=0 \\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0 \end{cases}$$

$a,b,$c□□衬勃鲂锄蜉 ！颀□□成踔□□ ！踔蚯□现□□~

□ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

1. a,b,c掺蓖□□蜉成踔□□ ！篓枷踔蚯□□Y

2. a,b,c表踔变标□□ ！疗崩标蓖□领蜉r(A)=2<3

3. $a=b=c$蜉 ！r(A)=1<3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

□a,b柄贷啡蜉 ！颁□□踔□ ！踔孽崩□ ！踔蚍□现□□~

□⌐
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a \end{pmatrix}$$

$a = 1$痹$b=3$蜉 ！$r(A)=r(\bar{A})=2<4$, 踔□丫

上页 下页 返回 结束

稼糖颀□□□□湫簀Y

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = -2 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 5x_5 = -3 \end{cases}$$

§6 线性方程组解的结构

齐次线性方程组解的结构

设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \quad (1)$$

为一齐次线性方程组，它的解集具有下面两个重要性值：

（1）两个解的和还是方程组的解；

（2）一个解的倍数还是方程组的解.

证明:

(1) 设$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$与$(l_1, l_2, \cdots, l_n)$是方程组(1)的解，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

于是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k_j + l_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = 0,$$

$$(i = 1, 2, \cdots, s)$$

故$(k_1 + l_1, k_2 + l_2, \cdots, k_n + l_n)$也是方程组(1)的解.

(2) 设$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$是方程组(1)的一个解，c为任一常数，则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(ck_j) = c\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = c \cdot 0 = 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots, s),$$

故$(ck_1, ck_2, \cdots, ck_n)$也是方程组(1)的一个解.

注 对于齐次线性方程组，综上可知，解的线性组合还是方程组的解. 即由数学归纳法容易证明

若

$$\eta_i=(k_1^{(i)},k_2^{(i)},\cdots,k_n^{(i)}),\ i=1,2,\cdots,t,$$

为线性方程组(1)的解，则对于任意一组数$c_1, c_2, \cdots, c_n$,

$$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_t\eta_t$$

也是(1)的解.

事实上，可以找到有限多个解$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$, 使得(1)的任一解都可以写成$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$的线性组合.

定义17

齐次线性方程组(1)的一组解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 称为(1)的一个基础解系．如果

1) (1)的任一个解都能表成$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 的线性组合；

2) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关．

注 定义中条件(2)是为了保证基础解系中没有多余的解．事实上，若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性相关，也就是其中一个可以表成其他的解的线性组合，例如，若η_t 可以表成$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{t-1}$ 的线性组合，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{t-1}$ 显然也具有性质1)．

定理12

在齐次线性方程组有非零解的情况下，它有基础解系，并且基础解系所含解的个数等于 $n-r$，其中 r 表示系数矩阵的秩.

注 $n-r$也就是自由未知量的个数.

证明:

设方程组的系数矩阵的秩为r，不妨设左上角的 r 级子式不等于零. 于是按上一节最后的分析，方程组(1)可以改写成

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2r}x_r=-a_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n, \end{cases} \qquad (3)$$

若$r=n$，则方程组没有自由未知量，方程组(3)的右端全为零．此时方程组只有零解，当然也就不存在基础解系．以下设$r<n$.

对于任意给定的一组$(x_{r+1},\cdots,x_n)=(c_{r+1},\cdots,c_n)$,
代入(3)，由克拉默法则可知它确定了唯一一组

$$(x_1,\cdots,x_r)=(c_1,\cdots,c_r),$$

则$(c_1,\cdots,c_r,c_{r+1},\cdots,c_n)$为方程组(3)的一组解，也是方程组(1)的一个解.

即方程组(1)的任意两个解，只要自由未知量的值相等，则两个解就完全一样.

特别地，如果在一个解中，自由未知量的值全为零，则这个解一定就是零解.

在(3)中分别用$n-r$组数

$$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1) \qquad (4)$$

来代自由未知量$(x_{r+1},\cdots,x_n)$，就得出方程组(3)（也是方程组(1)的$n-r$个解：

$$\begin{cases} \eta_1 = (c_{11},\cdots,c_{1r},1,0,\cdots,0), \\ \eta_2 = (c_{21},\cdots,c_{3r},0,1,\cdots,0), \\ \\ \eta_{n-r} = (c_{n-r,1},\cdots,c_{n-r,r},0,0,\cdots,1), \end{cases} \qquad (5)$$

下证 $\begin{cases} \eta_1 = (c_{11},\cdots,c_{1r},1,0,\cdots,0), \\ \eta_2 = (c_{21},\cdots,c_{3r},0,1,\cdots,0), \\ \\ \eta_{n-r} = (c_{n-r,1},\cdots,c_{n-r,r},0,0,\cdots,1), \end{cases}$ 就是一个基础解系.

首先证明$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关. 设

$$k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} = 0,$$

即

$$(*,*,\cdots,*,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}) = 0.$$

比较最后$n-r$个分量，得

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-r} = 0.$$

由此可知$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关.

再证方程组(1)的任一个解都可以用 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性表出．设

$$\eta=(c_1,\cdots,c_r,c_{r+1},\cdots,c_n) \tag{6}$$

是(1)的一个解. 由于$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是(1)的解，所以线性组合

$$c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\cdots+c_n\eta_{n-r} \tag{7}$$

也是(1)的一个解．比较（7）和（6）的最后$n-r$个分量得知，自由未知量有相同的值，从而这两个解完全相同，即

$$\eta=c_{r+1}\eta_1+c_{r+2}\eta_2+\cdots+c_n\eta_{n-r}. \tag{8}$$

故任意一个解η 都能表成$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 的线性组合.

综上所述，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 确为方程组(1)的一个基础解系．

对于其他的基础解系，由定义可知，满足：

(1) 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 等价；

(2) 线性无关．

由此可知，它与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 有相同个数的向量．

注1 证明过程事实上就是一个求基础解系的方法，也就是求解齐次线性方程组的一个方法.

注2 基础解系不是唯一的．事实上，任一与基础解系等价的线性无关的向量组也是一个基础解系．

注3 求齐次线性方程组的解，实际上只需求出它的一个基础解系$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，则它的全部解即为

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为任意一组数 .

非齐次线性方程组解的结构

设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{9}$$

为一非齐次线性方程组，若把它的常数项全换成0，得到一个齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

称为(9)的**导出组**.

为讨论非齐次线性方程组的解，先考察它的解与其相应导出组的解之间的关系．

1. 线性方程组(9)的两个差是它的导出组的解；

即若$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$与$(l_1, l_2, \cdots, l_n)$是方程组（9）的解，则

$$(k_1 - l_1, k_2 - l_2, \cdots, k_n - l_n)$$

为导出组（1）的解．

2. 线性方程组(9)的一个解与它的导出组的一个解之和还是这个线性方程组的一个解 .

即若($k_1, k_2, \cdots, k_n$) 为方程组(9)的解,($l_1, l_2, \cdots, l_n$) 为其导出组(1)的解，则

$$(k_1+l_1, k_2+l_2, \cdots, k_n+l_n)$$

仍为(9)的解 .

定理13

如果γ_0是方程组(9)的一个特解，则方程组(9)的任一个解γ都可以表成

$$\gamma=\gamma_0+\eta, \tag{10}$$

其中η是导出组(1)的一个解．因此，对于方程组(9)的任一特解γ_0，当η取遍它的导出组的全部解时，(10)就给出(9)的全部解．

证明：显然

$$\gamma=\gamma_0+(\gamma-\gamma_0)$$

由上面的1，$\gamma-\gamma_0$是导出组(1)的一个解，令

$$\gamma-\gamma_0=\eta,$$

则

$$\gamma = \gamma_0 + \eta.$$

既然(9)的任一个解都能表成(10)的形式，由2:

线性方程组(9)的一个解与它的导出组的一个解之和还是这个线性方程组的一个解 .

在η取遍(1) 的全部解的时候，

$$\gamma = \gamma_0 + \eta$$

就取遍(9)的全部解 .

注 由定理9可知，求一非齐次线性方程组(9)的解，只需

（1）求出它的一个特解γ_0

（2）求出它的导出组的全部解，即求出导出组的的一个基础解系$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$,

则（9）的全部解为

$$\gamma_0 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为任意一组数 .

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

□ A=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -8 & -24 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & -12 & -36 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

上页 下页 返回 结束

令

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

峒 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$! $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$! $\eta_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

黑□□︹$X = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3, k_1, k_2, k_3$柄础寮竦丶

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3+x_4+3x_5=-2 \\ 2x_1+6x_2-x_3-x_4+2x_5=-1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4-x_5=1 \\ 3x_1+9x_2-4x_3+5x_5=-3 \end{cases}$$

□⌒ $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & -4 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=r(\overline{A})=2<4$, 踔蚷□□Y

同解线性方程组 $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{5} - 3x_2 + \dfrac{4}{5}x_4 - \dfrac{3}{5}x_5 \\ x_2 = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}x_4 + \dfrac{4}{5}x_5 \end{cases}$

炼 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 蜉 $!\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ □□柄 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

着兹及□炼 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ !5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ !0 \\ 5 \end{pmatrix}$ 蜉 $!\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ !\,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ !\,4 \end{pmatrix}$

□柄 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, k_1, k_2, k_3柄础窘竦丶

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

解得同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 5x_5 \\ x_3 = x_5 \\ x_4 = -2x_5 \end{cases}$$

□柄 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $, k_1, k_2$ 柄础寮竦丶

求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3+x_4=-1 \\ x_1-x_2+x_3+4x_4=3 \\ 3x_1+9x_2-x_3+6x_4=1 \\ x_1-7x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$$

解得同解线性方程组

$$\begin{cases} x_1=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}x_3-\frac{7}{2}x_4 \\ x_2=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

□柄 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $,k_1,k_2$柄础寮竦丶

求解线性方程组

$$\begin{cases} (a-2)x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + (a-8)x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 14x_2 + (a+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

□中 $|A| = {}^{\circ}\, a - 1\ (a-3)^2$

$a = 1$,□柄X=k $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　　$a = 3$,□柄X=k $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$