第四章 线性空间

§1 集合 · 映射

1.集合

集合: 就是指作为整体看的一堆东西.
是数学中最基本的概念之一.

组成集合的东西称为这个集合的**元素**.

若元素a属于集合A，记为$a \in A$.

若元素a不属于集合A，记为$a \overline{\in} A$ 或 $a \notin A$.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$.

集合之间的关系

子集$M \subset N$,瑭$N \supset M$,　　不是子集$M \not\subset N$,

真子集 $M \subseteq N$

集合相等 $M = N \Leftrightarrow N \subset M$,痺$N \subset M$.

集合运算

集合的交 $M \cap N$　　集合的并 $M \cup N$

集合的补(大集合U, $M \subset U$) U^C 或$\complement_U M$

集合的差 $M - N = \{x \mid x \in M$挫$x \notin N\}$

2.映射

设 X 与 Y 是两个集合，所谓集合 X 到集合 Y 的一个**映射**是指一个法则，它使 X 中每一个元素 x 都有 Y 中一个确定的元素 y 与之对应，如果映射 f 使元素 $x\in X$ 与元素 $y\in Y$ 对应，记为

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto y$$

或

$$y = f(x)$$

y 称为 x 在映射 f 下的**像**，而 x 称为 y 在映射 f 下的一个**原像**.

映射的乘积（也称**复合映射**）

设映射

$$f: X \longrightarrow Y,$$

$$g: Y \longrightarrow Z,$$

定义f，g的乘积gf为

$$gf: X \longrightarrow Z$$

$$x \longmapsto z = g(f(x))$$

即

$$(gf)(x) = g(f(x)).$$

也称gf为g与f的**复合映射**，也记为$g \circ f$.

乘法结合律

设

$$f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W,$$

则

$$h(gf) = (hg)f.$$

乘法交换律不满足 $gf \neq fg.$

单位映射 所谓集合 X上的**单位映射**是指

$$1_M : X \to X$$
$$x \mapsto 1_M(x) = x.$$

单位映射也记为Id_X. 在不致于混淆的情况下简记为Id.

对于任意映射 $f: X \longrightarrow Y,$

总有

$$f 1_X = 1_Y f = f.$$

设映射 $f: X \to Y$,

若对于任意 $y \in Y$, 都存在 $x \in X$, 使得 $y = f(x)$,
则称 f 为**满射**或**映上的**.

若对于任意$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,
则称 f 为**单射**.

若f既是单射又是满射，则称 f 为**双射**或**1－1对应**.

逆映射

设映射$f:X\to Y$，若存在映射$g:Y\to X$，使得

$$gf=1_X, fg=1_Y,$$

则称f是**可逆的**，映射g称为f的**逆映射**.

命题1 若f是可逆的，则其逆映射是唯一的.

此时记f的逆映射为f^{-1}.

命题2 f是可逆的充分必要条件是f是双射.

§2 线性空间的定义与简单性质

引例1

在解析几何中所讨论的三维空间中的向量．按平行四边形法则定义了向量的加法，同时也定义了向量与数量乘法．定义的加法和数乘都具有一些性质，如加法的交换律，结合律，加法对数乘的分配律，存在零向量与负向量等．

引例2

在解线性方程组时，我们讨论过 n 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 作为元素的n维向量空间. 对于它们，也有加法与数量乘法，而且这些运算也与解析几何向量的运算有着完全类似的性质.

引例3

考虑闭区间$[a, b]$上所有连续函数的全体$C[a, b]$，我们知道连续函数的和是连续函数，连续函数与实数的数量乘积还是连续函数，这就是说在集合$C[a, b]$中可以定义加法和数量乘法，显然它们也具有类似的性质.

定义1

设V是一个非空集合，P是一个数域.在集合V的元素之间定义一种代数运算，称为**加法**；

即给出了一个法则，对于V中的任意两个元素α与β，在V中都有唯一的一个元素γ与它们对应，称为α与β的**和**，记为$\gamma=\alpha+\beta$.

在数域P与集合V的元素之间还定义了一种运算，称为**数量乘法**；

即对应数域P中任一个数k与V中任一元素α，在V中都有唯一的一个元素δ与它们对应，称为k与α的数量乘积，记为$\delta=k\alpha$.

如果加法与数量乘法满足下列规则，则称V为数域 P上的**线性空间**.

加法满足下面四条规则：

1）**交换律** $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2）**结合律** $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

3）**存在零元素**

即在V中有一个元素0，对应V中任一元素α都有

$$\alpha+0=\alpha$$

4）**存在负元素**

即对于V中每一个元素α, 都有V中的元素β, 都有

$$\alpha+\beta=0$$

数量乘法满足下面两条规则：

5）$1\alpha=\alpha$;

6）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$.

数量乘法与加法满足下面两条规则：

7）**数乘对数量加法有分配律** $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

8）**数乘对向量加法有分配律** $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

上述规则中，k，l 等表示数域P中的任意数；α, β,γ 等表示集合 V 中任意元素.

例1 几何空间中全部向量组成的集合是一个实数域上的线性空间.

分量属于数域P的全体n元数组构成数域P上的一个线性空间，记为P^n.

例2 数域 P 上一元多项式的全体 $P[x]$，按通常的多项式的加法和数与多项式的乘法，构成一个数域P上线性空间.

$P[x]$中次数小于 n 的多项式的全体，再添上零多项式也构成数域P上的一个线性空间，记为$P[x]_n$.

例3 元素属于数域P的$m\times n$矩阵的全体，按矩阵的加法和矩阵与数的数量乘法，构成数域P上的一个线性空间，记为$P^{m\times n}$.

例4 全体实函数，按函数的加法和数与函数的数量乘法，构成一个实数域上的线性空间.

例5 数域P按照本身的加法与乘法，即构成一个自身上的线性空间.

线性空间的元素也称为**向量**.

线性空间有时也称为**向量空间**.

以下经常用小写的系列字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示线性空间 V 中的元素，用小写的拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示数域 P 中的数.

线性空间的简单性质

1 零元素是唯一的.

2 负元素是唯一的.

定义**减法**为 $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

3. $0\alpha=0$; $k0=0$; $(-1)\alpha=\alpha$.

4. $k\alpha=0 \Rightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$

1 零元素是唯一的.

假设 $0_1, 0_2$ 是线性空间 V 中的两个零元素.

下证 $0_1 = 0_2$.

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

0_2 是零元素

0_1 是零元素

2 负元素是唯一的.

即对于给定的α, 满足条件$\alpha+\beta=0$的β是唯一的

设$\alpha+\beta_1=0, \alpha+\beta_2=0$, 则

$$\beta_1=\beta_1+0=\beta_1+(\alpha+\beta_2)=(\beta_1+\alpha)+\beta_2$$
$$=0+\beta_2=\beta_2$$

注 验证了负元素的唯一性之后，记α 的负元素为$-\alpha$.

定义**减法**为$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

3. $0\alpha = 0$ ；$k0 = 0$ ；$(-1)\alpha = \alpha.$

$$\alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha \Rightarrow 0\alpha = 0$$

$$k0 + k0 = k(0+0) = k0 \Rightarrow k0 = 0.$$

$$\alpha + (-1)\alpha = (1+(-1))\alpha = 0\alpha = 0 \Rightarrow (-1)\alpha = -\alpha$$

依次加上α, $k0$, α的**负元素**

4. $k\alpha = 0 \Rightarrow k = 0$或$\alpha = 0$

若$k \neq 0$, 则

$$\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}0 = 0$$

§ 3 维数 基和坐标

定义2 （线性组合、线性表出）

设V为数域P上一个线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in V$，$k_1,k_2,\cdots,k_r \in P, r \geq 1$,向量

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r,$$

称α为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的一个线性组合. 称$\alpha$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出.

注1 单个向量α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0.$

注2 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 其中有一个向量是其余向量的线性组合

$\Leftrightarrow$ 存在某个向量$\alpha_m (2 \le m \le r)$ 使得向量 α_m 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ 线性表出.

注3 两个等价的线性无关的向量组，必含有相同个数的向量.

注4 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 相关，则β 可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出，且表示法唯一.

定义5 （线性空间的维数）

如果在线性空间V中有n个线性无关的向量，但是任意$n+1$个向量都是线性相关的，则称V为n**维的**；

如果在V中可以找到任意多个线性无关的向量，就称V为**无限维的**。

本课程的主要研究对象之一就是有限维线性空间.

若线性空间V是n维的，记为$\dim_P V = n$或$\dim V = n$。

例如 几何空间中的向量，线性无关的向量最多是3个，而任意4个向量都是线性相关的，所以它是3维线性空间。

n元有序数组所成的向量空间，有 n 个线性无关的向量，而任意$n+1$个向量都是线性相关的，所以它是n维线性空间。

线性空间$P[x]_n$是n维的。

所有实系数多项式的全体构成的线性空间**R**[x], 是无限维的，因为对于任意的n，都有n个线性无关的向量

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}.$$

无限维空间是一个专门研究对象，它与有限维空间有比较大的差别。它的代数结构与拓扑结构都比较复杂，将在**泛函分析**中作详细讨论。

注 如果数域 P 上线性空间 V 只有一个向量，则由线性空间的定义可知，$V=\{0\}$. 此时，称 $V=\{0\}$ 为零维线性空间. 上述定义中数域 P 中的线性空间指的非非零维的.

注 对于同一个集合V，会因为数域P的不同，导致维数的不同。例如

设$V=\mathbf{C}$（复数的全体），当$P=\mathbf{R}$时，V为2维的线性空间。显然，$\{1, i\}$是一组基。

一方面，若 $a+bi=0$，$(a, b\in\mathbf{R})$，则$a=b=0$。即1与i线性无关。另一方面，对于任一 $z\in\mathbf{C}$，z可由1与 i 线性表出。

设$V=\mathbf{C}$（复数的全体），当$P=\mathbf{C}$时，V为1维的线性空间。显然，$\{1\}$是一组基。

事实上，对于任一$z=a+bi\in C$，$z=(a+bi)1$，即z可以用1线性表出。

定义6 （基、坐标）

在n维线性空间V中，n个线性无关的向量

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$$

称为V的一组**基**。

设α是V中任一向量，于是$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \alpha$线性相关，因此$\alpha$可以被基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$线性表出：

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

其中系数$a_1, a_2, \cdots, a_n$是被向量α和$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$唯一确定的，这组数就称为$\alpha$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$下的**坐标**，记为$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$.

注 线性空间中基的本质

1 线性无关性；

2 V 中任一向量都可由它线性表出。

事实上，上述两条本身就可作为基的定义。

定理1 如果在线性空间 V 中有n个线性无关的向量

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,$$

且 V 中任一向量都可以用它们线性表出，则 V 是n维的，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就是 V 的一组基。

证明： 因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性无关的，所以

$$\dim V \geq n。$$

下证$\dim V \leq n$。为此只需证明V中任意$n+1$个向量必定线性相关的。

设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n+1}$ 为V中任意n+1个向量，它们可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，假如它们线性无关，

则 $n+1 \leq n$，矛盾。

例1 在线性空间$P[x]_n$中，

$$1, x, x^2, \cdots, x^2,$$

是n个线性无关的向量，而且每一个次数小于n的数域P上的多项式都可以被它们线性表出，所以$P[x]_n$是 n 维的，而$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 就是它的一组基。

在这组基下，多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

的坐标就是它的系数$(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$.

如果在V中取另外一组基

$$\varepsilon_1' = 1, \varepsilon_2' = (x-a), \cdots, \varepsilon_n' = (x-a)^{n-1}.$$

如果在V中取另外一组基

$$\varepsilon_1' = 1, \varepsilon_2' = (x-a), \cdots, \varepsilon_n' = (x-a)^{n-1}.$$

则按Taylor公式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

因此，$f(x)$在基$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$下的坐标是

$$\left(f(a), f'(a), \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right).$$

例3 在线性空间P^n中，

$$\varepsilon_1 = (0,1,\cdots,0),$$
$$\varepsilon_2 = (1,0,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n = (0,0,\cdots,1)$$

是一组基。对每一个向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，都有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n.$$

所以$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$就是向量α在这组基下的坐标。

不难证明

$$\begin{cases} \varepsilon_1' = (1,1,\cdots,1), \\ \varepsilon_2' = (0,1,\cdots,1), \\ \quad\cdots\cdots \\ \varepsilon_n' = (0,0,\cdots,1) \end{cases}$$

是P^n中n个线性无关的向量。

在基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$下，对于向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，有

$$\alpha=(a_1-a_2)\varepsilon_1'+(a_2-a_3)\varepsilon_2'+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\varepsilon_{n-1}'+a_n\varepsilon_n'$$

$$=a_1\varepsilon_1'+(a_2-a_1)\varepsilon_2'+\cdots+(a_n-a_{n-1})\varepsilon_n'.$$

因此，α在基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$下的坐标为

$$(a_1,a_2-a_1,\cdots,a_n-a_{n-1}).$$

练习：

证明：

（1）实数域上所有二阶方阵组成一个线性空间。

（2）求上述空间的一组基

§4 基变换与坐标变换

□$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$蔽$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$柄$n$□□怚□□$V$□的两组基． 它们之间的关系是

$$\eta_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n$$

$$\eta_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\quad \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$\eta_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n$$

上式可以写成**矩阵形式**如下：

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回 结束

□$A=(a_{ij})$,枷笔啤料□柄

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

上式称为基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$到$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$的**基变换公式**,

矩阵A称为由$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$到$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$的**过渡矩阵**.

坐标变换公式的推导

□$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$蔽$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$柄$n$□□恒□□$V$□的两组基. 从$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$到$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n\}$的过渡矩阵为$A$，即

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A.$$

向量 ξ 在上述两组基下的坐标分别为

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \text{ 与 } (x_1',x_2',\cdots,x_n'),$$

即

$$\xi=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

向量 ξ 在上述两组基下的坐标分别为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 与 } (x_1', x_2', \cdots, x_n'),$$

即

$$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\xi = x_1'\eta_1 + x_2'\eta_2 + \cdots + x_n'\eta_n = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

故

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\xi=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix},\qquad \text{或者}\qquad \begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

坐标变换公式

§5 线性子空间

定义7 (线性子空间)

数域 P 上线性空间 V 的一个非空子集 W 称为 V 的 **线性子空间**（或简称**子空间**），如果 W 对于 V 的加法与数乘也成为一个线性空间.

定理2

如果线性空间V的非空子集W满足对于V的两种运算是封闭的，那么W就是一个子空间.

命题1

设W为线性空间V的子空间，则$\dim W \leq \dim V$.

例1 (平凡子空间)

零子空间$\{0\}$；整个空间V.

除上述两个子空间外，其余称为非平凡子空间.

例2 $P[x]_n$ 为 $P[x]$ 的非平凡子空间.

例3 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间构成 R^n 的一个子空间，其中 A 为 $m\times n$ 阶矩阵.

定义3 （生成子空间）

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为线性空间V的一组向量，集合

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r \mid k_1,\cdots,k_r\in P\}.$$

容易验证 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 为V 的线性子空间，称为由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ **生成的子空间**.

定理3

（1）$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\cdots,\beta_s)\Leftrightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与$\beta_1,\cdots,\beta_s$等价.

（2）$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的极大线性无关组为$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 的一组基，进而 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 的维数等于向量组的秩，（极大无关组中向量的个数）.

定理4

设W为数域P上线性空间V的一个m维子空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$为$W$的一组基，那么这组向量必定可扩充为整个空间$V$的基.

证明思路：

$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 若不是V 的基，存在向量α_{m+1}

$\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}$ 线性无关。若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}$ 仍不是基

α_{m+2}蓖□□$\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}$ 线性表出 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+2}$

证明：对维数差$n-m$作数学归纳法。

当$n-m=0$，定理显然成立。

事实上，此时$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$已经是$V$的基了。

假定$n-m=k$时定理成立，现考虑$n-m=k+1$的情形。

既然$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$还不是$V$的一组基，它又是线性无关的，则在$V$中必定有一个向量$\alpha_{m+1}$不能被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出，把$\alpha_{m+1}$添加进去得

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$$

必定线性无关的。

由定理3，子空间

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1})$$

是 $m+1$ 维的。

因为 $n-(m+1)=(n-m)-1=k+1-1=k$，由归纳假设，$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1})$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 可以扩充为整个空间的基。

根据归纳法原理，定理得证。

□□彼纪榴□□瑁□肇□□□绦冒□竦丶

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$蟾绦 !□竦柄3

§6 子空间的交与和

定理5

如果V_1, V_2是线性空间V的两个子空间，则它们的交$V_1 \cap V_2$也是V的子空间.

证明：

首先，$0 \in V_1$，$0 \in V_2$，可知$0 \in V_1 \cap V_2$，因而$V_1 \cap V_2$是非空的.

其次，如果$\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$，即

$$\alpha, \beta \in V_1,\ 且\ \alpha, \beta \in V_2,$$

则$\alpha + \beta \in V_1$，且$\alpha + \beta \in V_2$，因此$\alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$.

对数量乘积可以同理证明. 所以$V_1 \cap V_2$是子空间.

子空间的交的运算规律

交换律 $V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$

结合律 $(V_1 \cap V_2) \cap V_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$

由结合律，可以定义有限多个子空间的交：

$$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s = \bigcap_{i=1}^{s} V_i,$$

它也是子空间.

定义8

设V_1, V_2是线性空间V的两个子空间，所谓V_1, V_2的和，是指由所有能表示成$\alpha_1+\alpha_2$, 而$\alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2$的向量组成的子集合，记作$V_1+V_2$.

即 $$\{\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2\}.$$

证明: 显然，$V_1 + V_2$非空.

任取$\alpha, \beta \in V_1 + V_2$，即存在$\alpha_i, \beta_i, i = 1,2,$ 使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

则

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2),$$

又因为V_1, V_2是子空间，故$\alpha_1 + \beta_1 \in V_1, \alpha_2 + \beta_2 \in V_2,$

同理，

$$k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1 + V_2,$$

所以，$V_1 + V_2$是V的子空间.

子空间的和的运算规律：

交换律 $V_1+V_2=V_2+V_1$

结合律 $(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$

由结合律，可以定义有限多个子空间的交：

$$V_1+V_2+\cdots+V_s=\sum_{i=1}^{s}V_i,$$

它也是子空间.

$$\sum_{i=1}^{s}V_i=\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\mid\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,s\}.$$

命题1

设V_1,, V_2, W都是子空间，则

1) $W \subset V_1, W \subset V_2 \Rightarrow W \subset V_1 \cap V_2$;

2) $V_1 \subset W, V_2 \subset W \Rightarrow V_1 + V_2 \subset W$.

命题2

设V_1,, V_2, 是子空间，则下面三个论断等价：

1) $V_1 \subset V_2$;

2) $V_1 \cap V_2 = V_1$;

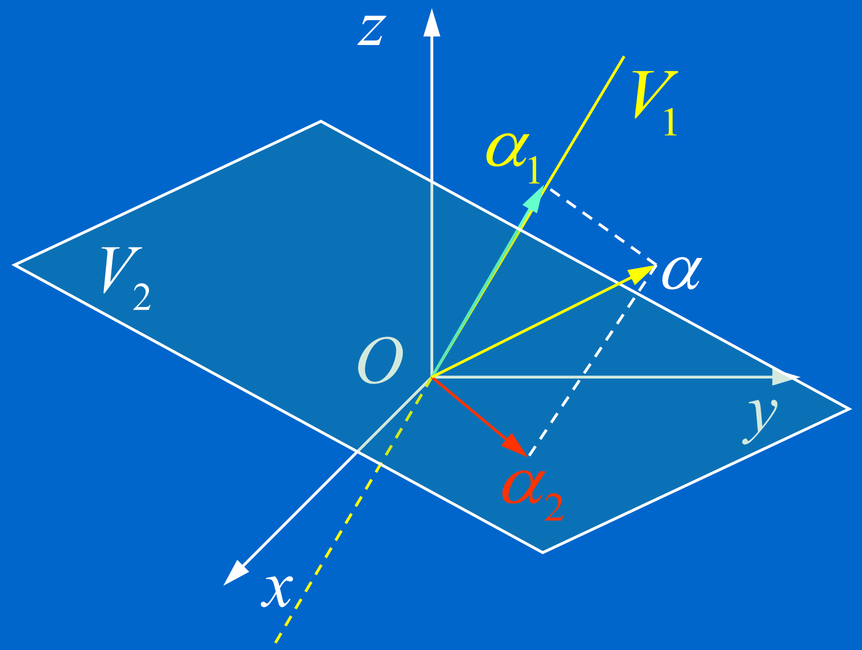
3) $V_1 + V_2 = V_2$.

例1

在三维几何空间中，用V_1表示一条过原点的直线，用V_2表示通过原点且与V_1垂直的平面，

则V_1与 V_2的交是$\{0\}$，

V_1与 V_2的和是整个空间.



例2 在线性空间P^n中，用V_1与 V_2分别表示齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0, \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1+b_{t2}x_2+\cdots+b_{tn}x_n=0 \end{cases}$$

的解空间，则$V_1\cap V_2$就是齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{t1}x_1+b_{t2}x_2+\cdots+b_{tn}x_n=0 \end{cases}$$

的解空间.

例3 在一个线性空间V中，我们有

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

$$=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t).$$

定理7（维数公式）

如果V_1, V_2是线性空间V的两个子空间，则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

证明思路：

设 $\dim(V_1)=n_1, \dim(V_2)=n_2, \dim(V_1\cap V_2)=m.$

先取$V_1\cap V_2$的一组基： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m.$ 将它分别扩充成V_1, V_2的基：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m};$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}.$$

则

$$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m})$$

只要证明了$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$是$V_1+V_2$的一组基，就可以说明了

$$\dim(V_1+V_2)=m+(n_1-m)+(n_2-m)=n_1+n_2-m.$$

这也等价于要证明它们线性无关.

证明:

根据上述分析，问题转化为证明:

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\cdots,\gamma_{n_2-m}$$

线性无关.

设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}$$

$$+q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=0.$$

令 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}$

$$=-q_1\gamma_1-\cdots-q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}.$$

$k_1=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0$

则 $\alpha\in V_1$, $\alpha\in V_2$, 于是 $\alpha\in V_1\cap V_2$. 令

$\alpha=0$

$$\alpha=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m,$$

$q_1=\cdots=q_{n_1-m}=0$

上页 下页 返回 结束

推论

如果n维线性空间V中两个子空间V_1，V_2的维数之和大于n，则V_1，V_2必含有非零的公共向量.

证明：

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2)$$

$$> n - \dim(V_1 + V_2)$$

$$> 0.$$

又 $\because \dim(V_1 + V_2) \le n$

所以，$V_1 \cap V_2$中含有非零向量.

茼□$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), V_2=L(\beta_1,\beta_2)$,

□$\dim(V_1+V_2), \dim(V_1\cap V_2)$.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$蟾崩□绦

$$\dim(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2)=\dim\mathrm{V}_1+\dim\mathrm{V}_2-\dim(\mathrm{V}_1+\mathrm{V}_2)=1$$

$$\beta_2=-\alpha_1+4\alpha_2+3\beta_1,$$

$$-\alpha_1+4\alpha_2=-3\beta_1+\beta_2 \in V_1 \cap V_2,$$

$$-\alpha_1+4\alpha_2=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

§7 子空间的直和

定义9

设V_1，V_2是线性空间V的子空间，如果和V_1+V_2中每个向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2,$$

是唯一的，这个和就称为**直和**，记为$V_1\oplus V_2$.

注 验证α的分解式是唯一的，即若设

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2,\ \alpha_i,\beta_i\in V_i,i=1,2.$$

则证明必有

$$\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2.$$

例如: 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间V的一组基,

$$V_1=L(\alpha_1),V_2=L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

则V_1+V_2就是直和.

事实上，设

$$\alpha=\beta_1+\beta_2,\beta_1\in V_1,\beta_2\in V_2$$

$$=\gamma_1+\gamma_2,\gamma_1\in V_1,\gamma_2\in V_2,$$

令

$$\beta_1=k_1\alpha_1,\beta_2=k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n,$$

$$\gamma_1=l_1\alpha_1,\gamma_2=l_2\alpha_2+\cdots+l_n\alpha_n,$$

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_n\alpha_n,$$

故$k_i=l_i,i=1,2,\cdots,n$, 从而$\beta_1=\gamma_1,\beta_2=\gamma_2$.

即α的分解式是唯一的.

子空间的和是直和的充分必要条件

(1) 和 $V_1 + V_2$ 是直和

$\longleftrightarrow$ **(2) 定理8** 若 $\alpha_1+\alpha_2=0, \alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2$, 则必有

$$\alpha_1=\alpha_2=0.$$

即零向量的分解是唯一的.

$\longleftrightarrow$ **(3) 推论** $V_1\cap V_2=\{0\}$

$\longleftrightarrow$ **(4) 定理9** $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

(3) $\longleftrightarrow$ **(4) 是显然的.**

证明:

(1) $\longrightarrow$ (2) 显然

(2) $\longrightarrow$ (1) 设

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2,\ \alpha_i, \beta_i \in V_i, i = 1, 2.$$

则

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = 0.$$

其中$(\alpha_i - \beta_i) \in V_i, i = 1, 2,$ 由定理的条件，应有

$$\alpha_i - \beta_i = 0,$$

即

$$\alpha_i = \beta_i \ (i = 1, 2).$$

即向量α的分解式是唯一的.

(2) ⟶ (3)

任取$\alpha \in V_1 \cap V_2$，于是零向量可以写成

$$0 = \alpha + (-\alpha), \quad \alpha \in V_1, -\alpha \in V_2.$$

由(2)可知，$\alpha = -\alpha = 0$，即

$$V_1 \cap V_2 = \{0\}.$$

(3) ⟶ (2)

设$0 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_i \in V_i, i = 1, 2.$

则

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \in V_1 \cap V_2.$$

由（3）知$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

即零向量的分解式是唯一的.

定理10

设U是线性空间V的一个子空间，则一定存在一个子空间W使 $V=U\oplus W$.

证明：

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$为U的一组基，将它扩充成V的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$. 令

$$W=L(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n),$$

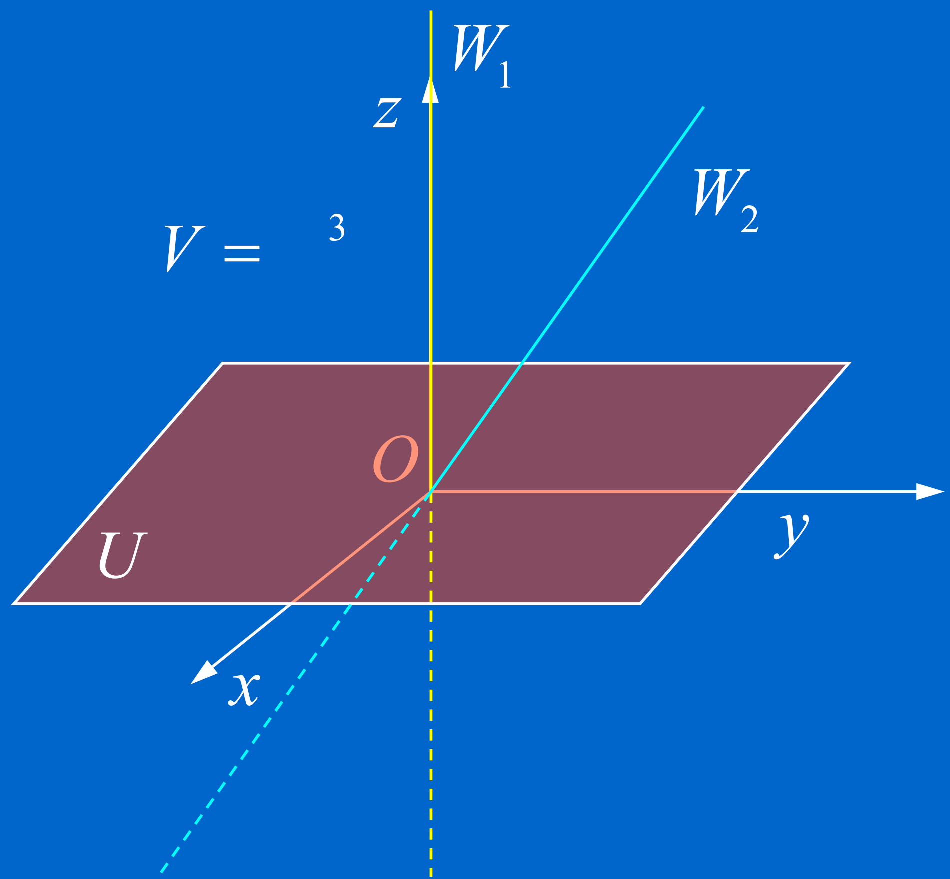
W即满足要求.

思考： 对于同一个子空间U，满足定理10要求的W是否是唯一的？

回答是否定的.例如

$$V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2,$$

显然$W_1 \neq W_2$.



多个子空间的直和

定义10

设$V_1, V_2,\cdots, V_s$线性空间V的子空间，如果和

$$V_1+V_2+\cdots+V_s$$

中每个向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,$$

$$\alpha_i\in V_i\ (i=1,2,\cdots,s)$$

是唯一的，这个和就称为**直和**，记为

$$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s.$$

多个子空间的和是直和的充分必要条件

设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 线性空间 V 的子空间，下面这些条件是等价的

（1）$W = \sum V_i$ 是直和；

（2）零向量的表法是唯一的；

（3）$V_i \cap \sum\limits_{j \neq i} V_j = \{0\}$

（4）$\dim(W) = \sum \dim(V_i)$.

（5）$V_i \cap \sum\limits_{j=1}^{i-1} V_j = \{0\}$.　**（习题）**

上述结论的证明和 $s = 2$ 的情形基本是一样的，不再赘述.

§8 线性空间的同构

线性空间V中取定一组基：

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,$$

在这组基下，V中每个向量α都有确定的坐标，

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,$$

而向量的坐标$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可以视为P^n的元素.即

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in P^n.$$

由此可以构造一个映射：

$$\sigma: V\to P^n \quad \sigma(\alpha)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

显然σ既是单射又是满射，即为双射.

逆映射为 $\sigma^{-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n.$

设

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n,$$

即向量α,β的坐标为$(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$$\alpha+\beta = (a_1+b_1)\varepsilon_1 + (a_2+b_2)\varepsilon_2 + \cdots + (a_n+b_n)\varepsilon_n,$$

$$k\alpha = (ka_1)\varepsilon_1 + (ka_2)\varepsilon_2 + \cdots + (ka_n)\varepsilon_n,$$

于是向量$\alpha+\beta,k\alpha$的向量分别是

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),$$

$$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n).$$

从而有

$$\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha).$$

上述分析说明在向量用坐标表示之后，它们的运算就可以归结为它们坐标的运算．因而线性空间 V 的讨论也就可以归结为 P^n 的讨论．

对于我们的研究对象**线性空间**而言，它上面只有两种运算：**加法**和**数乘**，可以设想如果两个线性空间有一个**双射**，而且这个双射是**保加法**和**保数乘**的，则这两个线性空间的**代数结构**就是一样的．

由此可知，数域 P 上 n 维线性空间 V 与 P^n 的代数结构就是一样的．

定义11

数域P上两个线性空间V与V'称为**同构的**，如果由V到V'有一个双射σ，具有以下性质：

1） $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

2） $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$,

其中α,β是V中任意向量，k是P中任意数，

此时称映射σ为**同构映射**.

注1

由本节开始的分析可知，数域 P 上任意一个 n 维线性空间 V 与 P^n 是同构的.

这一点就给我们对一般线性空间中的运算带来很大的方便，加法与数乘都可以转化到 P^n 中加法与数乘的运算.

注2

同构映射具有以下基本性质：

1. $\sigma(0)=0, \sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha).$

即同构映射将零向量映为零向量，将负向量映为负向量.

2. $$\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)$$
$$=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r).$$

3. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关（线性无关）

$\Longleftrightarrow$ $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)$线性相关（线性无关）

即同构映射保向量组的线性相关（无关）性.

4. V_1是V的子空间

$\Longleftrightarrow$ $\sigma(V_1)$是$V'=\sigma(V)$的子空间，且

$$\dim(V_1)=\dim(\sigma(V_1)).$$

5. 同构映射的逆映射已经两个同构映射的乘积还是同构映射.

注3 由上述性质5可知，线性空间的同构关系具有如下性质：

1）反身性

即V与V自身同构，只需取恒等映射.

2）对称性

即若V与V'同构，则V'与V同构.

事实上，若$\sigma: V \to V'$为同构映射，则$\sigma^{-1}: V' \to V$为由V'到V的同构映射.

3）传递性

即若V与V'同构，V'与V''同构，则V与V''同构.

事实上，若$\sigma: V \to V', \tau: V' \to V''$为同构映射，则$\tau\sigma: V \to V''$为由$V$到$V''$的同构映射.

因为数域 P 上任意一个 n 维线性空间 V 与 P^n 是同构的．结合同构关系的上述性质不难得到：

定理12

数域 P 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相等．

注 定理12给出了数域 P 上所有线性空间的一个分类，即可以按线性空间的维数进行分类，每一类中任意两个空间都同构．此外，在每一类中可以取一个代表，即 P^n．弄清楚 P^n 的代数结构，它所在类的其它线性空间的代数结构也就清楚了．

我们也可以如下直接构造数域 P 上两个维数相同的线性空间之间的同构映射：

分别在 V 与 V' 中取定两组基为

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n;\quad \varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n',$$

定义映射

$$\sigma: V \to V',$$

设 $\alpha=\sum_{i=1}^{n} k_i\varepsilon_i$，定义 $\sigma(\alpha)=\sum_{i=1}^{n} k_i\varepsilon_i'$.

容易验证 σ 确为由 V 到 V' 的同构映射.

也可先定义

$$\sigma(\varepsilon_i)=\varepsilon_i', i=1,2,\cdots,n.$$

然后再**线性延拓**到整个线性空间 V 上的映射：

$$\sigma(\sum_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}k_i\sigma(\varepsilon_i).$$