

第八章 二次型

§1 二次型及其矩阵表示

§2 标准形

§3 唯一性

§4 正定二次型

§1 二次型及其矩阵表示

1. 二次型的引入与定义

考察在平面直角坐标系 Oxy 下方程为

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$$

的二次曲线的形状.

作坐标变换 (坐标轴逆时针旋转 $\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$
得新坐标系 $Ox'y'$)

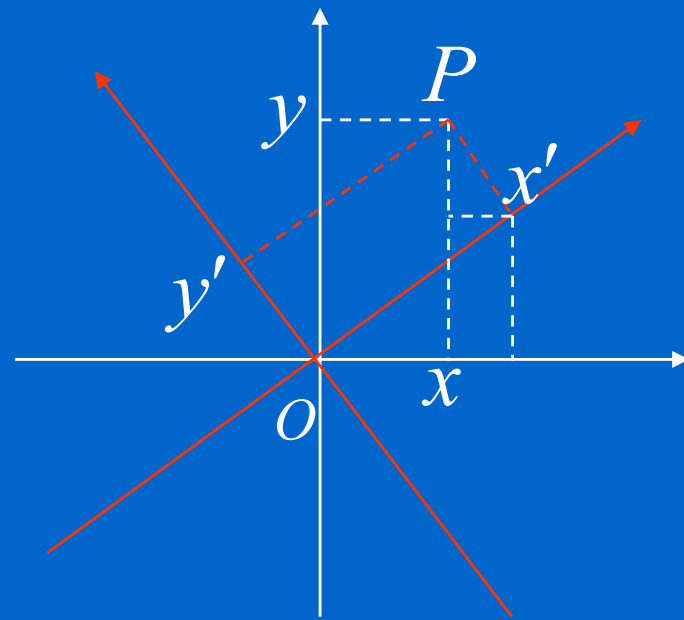
则同一点 P 在新老两种坐标系下坐标之间的关系为:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{cases} \quad (1) \quad \text{即} \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

若用向量语言即为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\text{即} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



于是将 (1) 式代入原方程

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6,$$

$$\begin{aligned} \text{即 } & 5 \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \right]^2 + 4 \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \right] \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \right] \\ & + 2 \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \right]^2 = 6, \end{aligned}$$

整理得 $6x'^2 + y'^2 = 6$.

由此很容易判定该二次曲线为椭圆曲线.

自然会问：

从原坐标系 Oxy 到新坐标系 $Ox'y'$ 的旋转角 $\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ 是如何确定的？新坐标系下方程如何容易求出？

本章正是从这个问题入手，引入 **“二次型”** 的概念及其化标准形的方法. 给出这类问题统一的解决方法.

再看二次曲线的一般方程：

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f$$

该如何作坐标变换（如何选择旋转坐标轴的角度 θ ，代数语言即如何寻找满足要求的二阶方阵），使得其方程形如

$$Ax'^2 + By'^2 = C,$$

从而判别原二次曲线的形状.

空间解析几何里面，在讨论二次曲面分类时，也遇到向类似的问题，即将

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = g$$

通过表 a, b, c, d, e, f, g 柄菡竦.

通过坐标轴旋转化为“标准型”（只含平方项，再通过平方项前面系数的符号就可判别这个二次曲面的大致上述问题，从代数的观点来看，就是用变量的线性替换化简一个二次齐次多项式，使它只含有平方项.

对于一般的二次齐次多项式，我们有如下定义：

定义5.1 (二次型)

设 P 是一个数域，一个系数在数域 P 的 $x_1, \dots, x_n$ 二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为数域 P 中一个 n 元二次型，简称二次型。

2. 线性替换

我们看到:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 \xrightarrow{\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}} 6x'^2 + y'^2$$

为研究二次型，我们常常希望通过变量的线性替换化简二次型，为此，我们引入“**线性替换**”：

定义5.2 (线性替换)

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ $y_1, y_2, \dots, y_n$ 是两组文字, 系数在数域 P 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的一个**线性替换**,
或简称线性替换.

如果系数行列式

$$\det(c_{ij}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么该线性替换就称为是**非退化的**.

线性替换也记为 $X = CY$, 其中

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

非退化线性替换即为 $\det C \neq 0$.

注 通常的坐标轴旋转是一种老坐标到新坐标的非退化的线性替换. **(为什么?)**

二维的情形, 若坐标轴逆时针旋转 θ , 则

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

但非退化的线性替换在几何上反映的并非都是坐标轴旋转 (保持长度单位不变), 情况很复杂. 就是哪些线性替换对应坐标轴旋转, 这将在后面的欧氏空间中加以讨论.

3. 二次型的矩阵

令 $a_{ji} = a_{ij}, i < j$

则二次型可写成

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &+ \cdots \cdots \cdots \\ &+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j = X^T AX \end{aligned}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

且 A 为对称矩阵($a_{ij} = a_{ji}$, 即 $A = A^T$).

称 (对称阵) A 为二次型 f 的矩阵.

即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

例1. 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 3x_2x_3 + 5x_3x_4$$

的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$$

$$f(X) = X^T A X$$

命题1 二次型和它的矩阵是相互唯一决定的.

证明: 给定一个对称阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 显然由

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

确定的二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵为 A .

另一方面, 若对称阵 A 和 B 均为二次型 f 的矩阵,
即若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX = X'BX$

且 $A' = A, B' = B$, 则 $A = B$.

4. 二次型的变量替换

设有从 X 到 Y 的非退化线性替换 $X=CY$, 将二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 变换为 $\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n)$, 则 $\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n)$ 仍为关于 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的二次型. 不妨设 $\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n)$ 的矩阵为 B , 即

$$\tilde{f}(y_1, \cdots, y_n) = Y'BY.$$

则

$$Y^T (C^T A C) Y = (CY)^T A (CY) = f(CY) = f(X) = \tilde{f}(Y) = Y^T B Y$$

从而 $B = C^T A C$.

思考：为什么要考虑非退化的线性替换？
一般的线性替换将二次型仍然变成二次型吗？

定义5.3 (合同, 或称相合)

数域 P 上 n 阶方阵 A 与 B 称为**合同的** (或**相合**) ,
如果有数域 P 上 n 阶**可逆阵** C , 使得

$$B = C^T A C.$$

命题2 合同关系是一种等价关系. 即

(反身性) A 与自身合同;

(对称性) 若 A 与 B 合同, 则 B 与 A 合同;

(传递性) 若 A 与 B 合同, B 与 D 合同, 则 A 与 D 合同.

证明：（反身性） 取 $C = E_n$, 则 $A = E_n^T A E_n$

（对称性） 若 A 与 B 合同, 则存在可逆 C , 使得

$$B = C^T A C$$

$$A = (C^T)^{-1} B C^{-1} \Rightarrow A = (C^{-1})^T B (C^{-1}).$$

从而 B 与 A 合同;

（传递性） 若 A 与 B 合同, B 与 D 合同, 即存在可逆

$$C_1, C_2 \text{ 使得 } B = C_1^T A C_1, D = C_2^T B C_2$$

$$A = C_2^T B C_2 = C_2^T (C_1^T A C_1) C_2 = (C_1 C_2)^T A (C_1 C_2).$$

从而 A 与 D 合同.

综上所述, 对于二次型 $f(X) = X^T A X$, 经过非退化线性替换 $X = CY$, 将原二次型变为关于 Y 的二次型 $\tilde{f}(Y) = Y^T B Y$, 则 A 与 B 合同, $B = C^T A C$.

反之, 可以作非退化线性替换 $Y = C^{-1} X$, 又可将 $\tilde{f}(Y) = Y^T B Y$ “还原” 成关于 X 的二次型 $f(X) = X^T A X$, 这是因为

$$(C^{-1})^T B C^{-1} = (C^{-1})^T (C^T A C) C^{-1} = A.$$

这种“可逆”关系正是我们考虑非退化线性替换的原因, 它保证了前后两个二次型性质的一致性.

§2 标准形

在 § 5.1 中, 我们知道二次型 $f(X) = X^T A X$ 经过非退化线性替换 $X = CY$, 变为关于 Y 的二次型

$$\tilde{f}(Y) = Y^T B Y,$$

矩阵 $B = C^T A C$.

另一方面, 若已知方阵 A 与 B 合同, (即 $B = C^T A C$, C 可逆), 则可作非退化线性替换 $X = CY$, 将 $f(X) = X^T A X$ 变为 $\tilde{f}(Y) = Y^T B Y$.

我们的目标就是寻求与对称阵 A 合同的“最简单”的矩阵，从而将二次型用最简单的矩阵形式表示。

对于任一复数域或实数域中的对称阵 A ，总可以找到一个**对角阵**与之合同。

对应于几何语言：对于任一二二次型 $f(X) = X^T A X$ ，都可以找到一个非退化线性替换 $X = CY$ ，变为如下形式：

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2.$$

这种形式就称为原二次型的**“标准形”**。

定理1

数域 P 上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换变成如下形式

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2.$$

注1 上述形式称为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**标准形**但标准形是不唯一的.

注2 用代数（矩阵）语言表述即为：

定理1'

在数域 P 上，任意一个对称矩阵都合同于一对角矩阵.

定理1的证明: (数学归纳法结合配方法)

对于 $n=1$, 差□丝辣柄 $f(x_1) = a_{11}x_1^2$ 定理结论自然成立.

假设对 $n-1$ 元二次型, 定理的结论成立. 再设

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = X^T A X$$

$$(a_{ij} = a_{ji}, A = (a_{ij}))$$

分以下三种情形来讨论

(1) $a_{ii} (i = 1, 2, \dots, n)$ □纵蹕崩标菟柄□.

菟穴□ $a_{11} \neq 0$, □蜉

用归纳假设

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)x_1 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij}x_ix_j$$

$$= a_{11}x_1^2 + 2\left(\sum_{j=2}^n a_{1j}x_j\right)x_1 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij}x_ix_j$$

配方

$$= a_{11} \left[x_1^2 + \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right) \right]^2 - \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right)^2 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij} x_i x_j$$

$$= a_{11} \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 + \sum_{i,j=2}^n b_{ij} x_i x_j$$

不含 x_1 , 是 $x_2, \dots, x_n$ 的二次型
正好使用归纳假设

其中

$$\sum_{i,j=2}^n b_{ij} x_i x_j = -\frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right)^2 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij} x_i x_j$$

蟾 $x_2, \dots, x_n$ 差丝.

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j, \\ y_2 = x_2, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} y_j, \\ x_2 = y_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

这是一个非退化的下线性替换 $X = C_1 Y$, 鸿表

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & -a_{11}^{-1}a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

它使 $f(x_1, \dots, x_n) = a_{11} \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 + \sum_{i,j=2}^n b_{ij} x_i x_j$

$$= a_{11} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^n b_{ij} y_i y_j$$

由归纳假设，对 $\sum_{i,j=2}^n b_{ij} y_i y_j$ 有非退化的线性替换

$$\begin{cases} y_2 = c_{22}z_2 + c_{23}z_3 + \cdots + c_{2n}z_n \\ y_3 = c_{32}z_2 + c_{33}z_3 + \cdots + c_{3n}z_n \\ \dots\dots\dots \\ y_n = c_{n2}z_2 + c_{n3}z_3 + \cdots + c_{nn}z_n \end{cases}$$

$n-1$ 元二次型

即
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{令 } C_2 = \begin{pmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

使
$$\sum_{i,j=2}^n b_{ij} y_i y_j = d_2 z_2^2 + d_3 z_3^2 + \cdots + d_n z_n^2$$

于是非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = c_{22}z_2 + c_{23}z_3 + \cdots + c_{2n}z_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_n = c_{n2}z_2 + c_{n3}z_3 + \cdots + c_{nn}z_n \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{C_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix} Z$$

$$= C_3 Z$$

就能使 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 变为

$$f = a_{11}^2 z_1^2 + d_2 z_2^2 + \cdots + d_n z_n^2$$

从 X 到 Z 的非退化线性替换为 $X = C_1 Y = C_1 C_3 Z$

令 $C = C_1 C_3$, 则 $X = CZ$,

并且 $\det(C) = \det(C_1 C_3) = (\det C_1)(\det C_3) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & -a_{11}^{-1}a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -a_{11}^{-1}a_{12} & \cdots & -a_{11}^{-1}a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

(2) $a_{11} = 0$, 挫□纵踔崩标 $a_{1j} \neq 0 \quad !j = 2, \dots, n$.

不失一般性设 $a_{12} \neq 0$, 令

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2, \\ x_2 = z_1 - z_2, \\ x_3 = z_3, \\ \dots \\ x_n = z_n, \end{cases} \quad \begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= 2a_{12}x_1x_2 + \dots \\ &= 2a_{12}(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + \dots \\ &= 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2 + \dots \end{aligned}$$

上式右端为关于 $z_1, \dots, z_n$ 的二次型,
且 z_1^2 的系数 $2a_{12} \neq 0$, 变为第一种情形.

$$(3) \quad a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0.$$

由对称性, 有 $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$. 此时

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=2}^n a_{ij} x_i x_j$$

它本身就是一个 $n-1$ 元二次型, 由归纳假设可知, 定理的结论成立.

综上所述, 定理结论成立.

例2 将二次型

第2种情形, $a_{11} = 0, a_{12} \neq 0$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$$

化为标准形, 并求相应的线性替换.

解: 令 $x_1 = z_1 + z_2, x_2 = z_1 - z_2, x_3 = z_3, x_4 = z_4$

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$$

$$= (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) + (z_1 - z_2)z_3 + z_3z_4$$

$$= z_1^2 - z_2^2 + z_1z_3 - z_2z_3 + z_3z_4$$

第1种情形, $a_{11} \neq 0$ 先配 z_1

$$= \left(z_1 + \frac{1}{2}z_3\right)^2 - z_2^2 - \frac{1}{4}z_3^2 - z_2z_4 + z_3z_4$$

再配 z_2

第2种情形, $a_{11} = 0, a_{12} \neq 0$

$$= \left(z_1 + \frac{1}{2}z_3\right)^2 - \left(z_2 + \frac{1}{2}z_4\right)^2 + z_3z_4$$

$$= \left(z_1 + \frac{1}{2}z_3\right)^2 - \left(z_2 + \frac{1}{2}z_4\right)^2 + \frac{1}{4}(z_3 + z_4)^2 - \frac{1}{4}(z_3 - z_4)^2$$

$$= y_1^2 - y_2^2 + \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2$$

其中

$$y_1 = z_1 + \frac{1}{2}z_3, y_2 = z_2 + \frac{1}{2}z_4, y_3 = z_3 + z_4, y_4 = z_3 - z_4$$

故

$$z_1 = y_1 - \frac{1}{2} \frac{y_3 + y_4}{2} = y_1 - \frac{1}{4} y_3 - \frac{1}{4} y_4$$

$$z_2 = y_2 - \frac{1}{2} \frac{y_3 - y_4}{2} = y_2 - \frac{1}{4} y_3 + \frac{1}{4} y_4$$

$$z_3 = \frac{1}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4, z_4 = \frac{1}{2} y_3 - \frac{1}{2} y_4$$

$$\text{于是 } x_1 = z_1 + z_2 = y_1 + y_2 - \frac{1}{2} y_3 \quad x_3 = z_3 = \frac{1}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4$$

$$x_2 = z_1 - z_2 = y_1 - y_2 - \frac{1}{2} y_4 \quad x_4 = z_4 = \frac{1}{2} y_3 - \frac{1}{2} y_4.$$

故线性替换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

定理1的证明“翻译”为代数语言，即对于对称阵 A 的处理同时也给出了化二次型为标准形的另一种方法，我们称之为“**合同变换法**”。

先写出二次型矩阵 A ，再作如下矩阵变换：

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline E \end{array} \right) \xrightarrow[\text{对 } E \text{ 同时作列变换}]{\text{对 } A \text{ 作合同变换}} \left(\begin{array}{cccc} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \\ \hline & & & & C \end{array} \right)$$

则

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

所谓“对 A 作合同变换，对 E 同时作列变换”是指：
即 A 与 E 每次先作一次列变换，然后 E 不动，对 A 再作一次对应的行变换，直到将 A 化为对角形为止.

这是因为矩阵作一次列变换，相当于右乘一个初等矩阵；作一次行变换，相当于左乘一个初等矩阵。

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\text{合同变换}} \\ \left(\begin{array}{c} A \\ E \end{array} \right) \xrightarrow[A \text{与} E \text{ 同作列变换}]{} \left(\begin{array}{c} AP^T \\ P^T \end{array} \right) \xrightarrow[E \text{ 不动}]{A \text{作相应的行变换}} \left(\begin{array}{c} PAP^T \\ P^T \end{array} \right) \end{array}$$

其中 P 为初等矩阵 $P(i, j), P(i(c)), P(i, j(k))$

注1 其中一次变换是指： A 与 E 同作一次列变换，然后 E 不动，再对 A 作一次相应的行变换。

注2 值得注意的是作变换 $P(i(c))$ ， A 的第 i 行与第 i 列都须乘上 c ，故 a_{ii} 应变为 $c^2 a_{ii}$ ， $\square$ 鼯蟾 ca_{ii} 。

$$\left(\begin{array}{c} A \\ E \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{A \text{ 与 } E \text{ 同作} \\ \text{一次列变换}}} \left(\begin{array}{c} AP_1^T \\ P_1^T \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{E \text{ 不动}}]{\substack{A \text{ 作相应的} \\ \text{一次行变换}}} \left(\begin{array}{c} P_1 A P_1^T \\ P_1^T \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{A \text{ 与 } E \text{ 同再作} \\ \text{一次列变换}}} \left(\begin{array}{c} P_1 A P_1^T P_2^T \\ P_1^T P_2^T \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{E \text{ 不动}}]{\substack{A \text{ 再作相应的} \\ \text{一次行变换}}} \left(\begin{array}{c} P_2 P_1 A P_1^T P_2^T \\ P_1^T P_2^T \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{c} P_m \cdots P_2 P_1 A P_1^T P_2^T \cdots P_m^T \\ P_1^T P_2^T \cdots P_m^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \\ \hline C \end{array} \right)$$

$$\underline{\underline{\text{令 } C = P_1^T P_2^T \cdots P_m^T}} \left(\begin{array}{c} C^T A C \\ C \end{array} \right) \underline{\underline{=}} \left(\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \\ \hline C \end{array} \right)$$

例3 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 \\ + 8x_2x_4 - 4x_3x_4$$

化为标准形，并求相应的线性替换.

解 二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hline E \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{A与E的第1列与第2列互换}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{E 不动}]{\text{A的第1行与第2行互换}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{A与E的第1列} \times (-1) \text{ 加到第2列}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & -5 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**A 的第1行
× (-1)
加到第2行**

E 不动

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & -5 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**A与E 的第1列
× (-2)
加到第3列**

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & -2 & -5 & -2 \\ 4 & -5 & -10 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**A 的第1行
× (-2)
加到第3行**

E 不动

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 \\ 4 & -5 & -10 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**A与E 的第1列
× (-5)
加到第4列**

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 \\ 4 & -5 & -10 & -14 \\ \hline 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**A的第1行
× (-4)
加到第4行**

E 不动

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -14 \\ \hline 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**A与E的第2列
× (-2)
加到第3列**

**A的第2行
× (-2)
加到第3行**

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -14 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**A与E的第2列
× (-5)
加到第4列**

**A的第2行
× (-5)
加到第4行**

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

则取 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

作非退化线性替换 $X = CY$, 则二次型 f 变为标准形

$$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 11y_4^2.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

$$\square \text{猜} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$= -y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$$

□猜

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$= 2y_1^2 + 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2$$

§3 唯一性

数域 P 上二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$$

存在非退化线性替换 $X=CY$, 使得二次型变为标准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$$

从定理的证明中可以发现, $d_1, d_2, \dots, d_n$ 的值并不唯一, 即二次型的标准形不是唯一的. 即 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 本身不能作为合同不变性.

但我们可以发现 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 中非零元素的个数是唯一的，也就是说，对同一个二次型 f ，化为标准形后，所含系数不为0的平方项的个数是唯一的。

思考 对角阵

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

中对角线上非零元素的个数对应矩阵的什么量？

于是，找到第一个合同不变量：**矩阵的秩.**

定义

二次型 f 对应矩阵的秩称为该**二次型的秩.**

下面就复数域 $\mathbf{C}$ ，实数域 $\mathbf{R}$ 分别进行讨论，寻找新的合同不变量.

1 复数域C中二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$$

经过非退化线性替换 $X = CY$, 化为标准形

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_r y_r^2 \quad (1)$$

$$d_i \neq 0, r = 1, 2, \dots, r.$$

易知 r 就是二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵的秩.

再作一非退化线性替换

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \dots, y_r = \frac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \quad (2)$$

$$y_{r+1} = z_{r+1}, \dots, y_n = z_n.$$

原二次型变为

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2 \quad (3)$$

上述形式称为复二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**规范形**。
显然，规范形完全被原二次型矩阵的秩所决定的。

定理3

任意一个复系数的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的。

对应于矩阵语言：

任一复数的对称矩阵合同于一个形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $r = \text{秩}(A)$ 。

两个复数对称矩阵合同



它们的秩相等。

2 实数域R中二次型

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一实系数的二次型。由定理1, 经过某一个非退化线性替换, 再适当调换变量的次序, 可使 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变成标准形

$$d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2,$$

其中 $d_i > 0, i = 1, \cdots, r$; r 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩。

因为在实数域中，正实数总可以开平方，所以再作一非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ \dots \\ y_r = \frac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \dots \\ y_n = z_n, \end{cases}$$

二次型就变成

显然规范形完全被 r, p 这两个数所决定

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2.$$

上述形式称为实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的**规范形**。

定理4 (惯性定理)

任意一个实系数的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的。

证明：定理的前一半已经证过，下证唯一性。

设实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 经过非退化线性替换 $X = BY$ 化成规范形

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2,$$

而经过非退化线性替换 $X = CZ$ 也化成规范形

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = z_1^2 + \dots + z_q^2 - z_{q+1}^2 - \dots - z_r^2,$$

下证 $p = q$ 。用反证法。

设 $p > q$ 。则

$$\begin{aligned} & y_1^2 + \cdots y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \\ &= z_1^2 + \cdots z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $Z = C^{-1}X = C^{-1}BY$. 令

$$C^{-1}B = G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n, \\ z_2 = g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \cdots + g_{2n}y_n, \\ \vdots \\ z_n = g_{n1}y_1 + g_{n2}y_2 + \cdots + g_{nn}y_n. \end{cases}$$

若能找到一组 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 使得

$$z_1 = \cdots = z_q = 0, y_{p+1} = \cdots = y_n = 0, \quad (2)$$

且有一个 $y_i \neq 0, 1 \leq i \leq p$, 则代入 (1) 式得

$$\begin{aligned} 0 &< y_1^2 + \cdots y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 \\ &= z_1^2 + \cdots z_q^2 - z_{q+1}^2 - \cdots - z_r^2 \leq 0, \end{aligned}$$

矛盾, 故 $p \leq q$ 。同理可证 $q \leq p$, 从而 $p = q$ 。

于是考虑线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n = 0, \\ \cdots \\ g_{q1}y_1 + g_{q2}y_2 + \cdots + g_{qn}y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \cdots \\ y_n = 0. \end{cases} \quad (10)$$

上述方程组含有 n 个未知量，而方程个数为

$$q + (n - p) = n - (p - q) < n.$$

故方程个数小于未知量的个数，即（10）有非零解

$$(k_1, \cdots, k_q, k_{p+1}, \cdots, k_n)$$

$(k_1, \dots, k_q, k_{p+1}, \dots, k_n)$ 代入

$$\begin{cases} g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \dots + g_{1n}y_n = 0, \\ \dots \\ g_{q1}y_1 + g_{q2}y_2 + \dots + g_{qn}y_n = 0, \\ y_{p+1} = 0, \\ \dots \\ y_n = 0. \end{cases}$$

$$\longrightarrow k_{p+1} = \dots = k_n = 0$$

$(k_1, \dots, k_q, k_{p+1}, \dots, k_n)$ 代入 $y_1^2 + \dots y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$

$$\longrightarrow k_1^2 + \dots k_p^2 > 0$$

$$(k_1, \dots, k_q, k_{p+1}, \dots, k_n) \text{ 代入 } \begin{cases} z_1 = g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \dots + g_{1n}y_n, \\ z_2 = g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \dots + g_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots \\ z_n = g_{n1}y_1 + g_{n2}y_2 + \dots + g_{nn}y_n. \end{cases} \longrightarrow z_1 = \dots z_q = 0$$

$$\longrightarrow z_1^2 + \dots z_q^2 - z_{q+1}^2 - \dots - z_r^2 = -z_{q+1}^2 - \dots - z_r^2 \leq 0$$

矛盾, 故 $p \leq q$ 。

同理可证 $q \leq p$, 从而 $p = q$ 。

定义3

在实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形中，正平方项的个数 p 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**正惯性指数**；负平方项的个数 $r-p$ 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**负惯性指数**；它们的差 $p-(n-p)=2p-n$ 称为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**符号差**.

注 实二次型的标准形是不唯一的，但是由上面化成规范形的过程可以看出，标准形中系数为正的平方项的个数与规范形中正平方项的个数是一致的.

惯性定理另一种表述

实二次型的标准形中的系数为正的平方项的个数是唯一确定的，它等于正惯性指数，而系数为负的平方项的个数就等于负惯性指数。

正、负惯性指数，符号差也都是**合同不变量**。

正惯性指数

负惯性指数

符号差

秩

只要知道其中两个，就能求出其余的两个

两个实对称阵合同 $\iff$ 它们的秩与正惯性指数相等。

例：设A是n阶可逆矩阵，求 $\begin{pmatrix} O & A \\ A^T & O \end{pmatrix}$ 的正负惯性指数和符号差。

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & O \\ A^T & E \end{pmatrix}, \text{ 加 } \begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & A \\ A^T & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ A^T & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2AA^T & A \\ A^T & O \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} E & -\frac{1}{2}(A^T)^{-1} \\ O & E \end{pmatrix}, \text{ 加 } \begin{pmatrix} E & O \\ -\frac{1}{2}A^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2AA^T & A \\ A^T & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -\frac{1}{2}(A^T)^{-1} \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2AA^T & O \\ O & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} (A^T)^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix}, \text{ 加 } \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2AA^T & O \\ O & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A^T)^{-1} & O \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E & O \\ O & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix}$$

$$C = C_1 C_2 C_3, C^T B C = C_3^T C_2^T C_1^T B C_1 C_2 C_3 = \begin{pmatrix} 2E & O \\ O & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix}$$

正负惯性指数都为n，符号差为0

定理5

任一实对称矩阵 A 都合同于下述形式的对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{p \uparrow 1} & & \\ & \underbrace{-1 \cdots -1}_{q \uparrow -1} & \\ & & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{pmatrix}$$

其中 p 为 A 的正惯性指数， q 为 A 的负惯性指数。

$$p + q = r = \text{秩}(A).$$

§4 正定二次型

定义5

实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为**正定的**, 如果对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \dots, c_n$, 都有

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0.$$

注1 显然 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 正定也可定义为:

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

注2 容易证明

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

正定 $\iff d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n.$

命题

正定性是一种合同不变性。即

若

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

为正定的，则经过非退化线性替换 $X=CY$ ，变成二次型

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} y_i y_j$$

也是正定的。

证明:

对于任一组不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_n$, 设

$$y_1 = k_1, y_2 = k_2, \dots, y_n = k_n,$$

令

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

因为 C 是可逆阵, 故 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 也不全为零。

于是

$$g(k_1, k_2, \dots, k_n) = f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$$

从而 $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 正定。

定理6

n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 正定

$\longleftrightarrow$ 它的正惯性指数等于 n 。

证明： 由上述命题立知。

定义5

实对称矩阵 A 称为**正定的**，如果二次型

$$X^T A X$$

正定。

注 显然

对称阵 A 正定

↔ A 与单位阵合同

↔ 存在可逆矩阵 C ，使得 $A = C^T E C = C^T C$

推论 正定矩阵的行列式大于0。

证明： 由 $A = C^T C$ （ C 可逆）立知。

直接从二次型的矩阵来判别二次型是不是正定的，不需要将二次型化为规范形后才能判别。

定义5

子式

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $A = (a_{ij})_{nn}$ 的**顺序主子式**。

1级 2级 i 级 n 级即 $\det(A)$

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

定理7

实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X^T A X$$

是正定的 $\iff$ 矩阵 A 的所有顺序主子式全大于零。

证明: $\implies$ 设

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

是正定的。对于每个 k , $1 \leq k \leq n$, 令

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} x_i x_j.$$

下证 f_k 是一个 k 元的正定二次型。

对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \dots, c_k$, 有

$$f_k(c_1, \dots, c_k) = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} c_i c_j = f(c_1, \dots, c_k, 0, \dots, 0)$$

因此 $f_k(x_1, \dots, x_k)$ 是正定的。由上述推论可知, f_k 的矩阵的行列式

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, k = 1, \dots, n.$$

这就证明了矩阵 A 的所有顺序主子式全大于零。

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k \quad \cdots \quad x_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

← 对 n 作数学归纳法。

当 $n = 1$ 时,

$$f(x_1) = a_{11}x_1^2,$$

由条件 $a_{11} > 0$ 显然有 $f(x_1)$ 是正定的。

假设充分性对 $n-1$ 元二次型已经成立, 下证 n 元的情形。

$$\text{令 } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

于是矩阵 A 可以分块写成

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

既然 A 的顺序主子式全大于零，当然 A_1 的顺序主子式也全大于零。由归纳假设， A_1 是正定矩阵，故有可逆的 $n-1$ 级矩阵 G 使

$$G^T A_1 G = E_{n-1},$$

其中 E_{n-1} 为 $n-1$ 级单位矩阵。令

$$C_1 = \begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} C_1^T A C_1 &= \begin{pmatrix} G^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G^T A_1 G & G^T \alpha \\ \alpha^T G & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & G^T \alpha \\ \alpha^T G & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

再令

$$C_2 = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^T \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix},$$

有

$$\begin{aligned} C_2^T C_1^T A C_1 C_2 &= \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^T G & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & G^T \alpha \\ \alpha^T G & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^T \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha^T G^T G \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

令

$$C = C_1 C_2, \quad a_{nn} - \alpha^T G^T G \alpha = a,$$

就有

$$C^T A C = \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a \end{pmatrix},$$

两边取行列式,

$$|C|^2 |A| = a$$

由条件, $|A| > 0$, 因此 $a > 0$ 。显然

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & \sqrt{a} \end{pmatrix} E_n \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

这就是说, 矩阵 A 与单位矩阵合同。因此, A 正定, 或者二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是正定的。

合同变换法步骤图

$$\begin{pmatrix} G^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

$$G^T A_1 G = E_{n-1}$$

行变换, 第1行左乘 G^T

列变换, 第1列左乘 G

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^T G & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & G^T \alpha \\ \alpha^T G & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} & -G^T \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

行变换, 将 $\alpha^T G$ 变换成 O

列变换, 将 $G^T \alpha$ 变换成 O

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha^T G^T G \alpha \end{pmatrix} > 0, \text{即可}$$

例 判别二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$
是否正定。

解 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

它的顺序主子式

$$\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} > 0,$$

因此, $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定。

正定的充分必要条件小结

二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 正定, 即
对于任意一组不全为零的数 $c_1, c_2, \dots, c_n$, 都有

$$f(c_1, c_2, \dots, c_n) > 0$$

$\iff$ 若 $f(c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, 则必有 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

$\iff$ 正惯性指数为 n

$\iff f$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$

$\iff$ 矩阵 A 与单位矩阵 E 合同, 即存在可逆矩阵 C ,

$$C^T A C = E$$

$\iff$ 存在可逆矩阵 C , 使得 $A = C^T C$

$\iff A$ 的所有顺序主子式全大于 0

$\iff A$ 的所有主子式全大于 0

定义7

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一实二次型, 对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 如果都有

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) < 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**负定的**;

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**半正定的**;

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0$, 则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**半负定的**;

如果既不是半正定的又不是半负定的,

则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**不定的**。

定理8 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

对于实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X,$$

其中 A 是实对称的, 下列条件等价:

- (1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是半正定的;
- (2) 它的正惯性指数与秩相等;
- (3) 有可逆实矩阵 C , 使

$$C^T A C = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix},$$

其中 $d_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$

(4) 有实矩阵 C 使

$$A = C^T C$$

(5) A 的所有主子式全大于零。

注1 所谓一个 k 级主子式, 是指形如

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

的 k 级子式, 其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

		i_1 列	i_2 列	$\dots$	i_k 列				
	a_{11}	$\dots$	a_{1i_1}	$\dots$	a_{1i_2}	$\dots$	a_{1i_k}	$\dots$	a_{1n}
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
i_1 行	a_{i_11}	$\dots$	$a_{i_1i_1}$	$\dots$	$a_{i_1i_2}$	$\dots$	$a_{i_1i_k}$	$\dots$	a_{i_1n}
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
i_2 行	a_{i_21}	$\dots$	$a_{i_2i_1}$	$\dots$	$a_{i_2i_2}$	$\dots$	$a_{i_2i_k}$	$\dots$	a_{i_2n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
i_n 行	a_{i_k1}	$\dots$	$a_{i_ki_1}$	$\dots$	$a_{i_ki_2}$	$\dots$	$a_{i_ki_k}$	$\dots$	a_{i_kn}
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	a_{n1}	$\dots$	a_{ni_1}	$\dots$	a_{ni_2}	$\dots$	a_{ni_k}	$\dots$	a_{nn}

注2 在(5)中，仅有顺序主子式大于或等于零是不是保证半正定性的。

反例

$$f(x_1, x_2) = -x_2^2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

例：设二维向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 试写出

$$f(x_1, x_2) = X^T \alpha_1 \alpha_1^T X + X^T \alpha_2 \alpha_2^T X$$

对应的矩阵，并求出t为何值时，二次型是正定的。

$$f(x_1, x_2) = X^T \alpha_1 \alpha_1^T X + X^T \alpha_2 \alpha_2^T X$$

$$= X^T (\alpha_1 \alpha_1^T + \alpha_2 \alpha_2^T) X$$

$$= X^T \begin{pmatrix} 1+t^2 & 2+t \\ 2+t & 5 \end{pmatrix} X$$

$$t \neq \frac{1}{2} \quad \text{正定}$$

$$A_1 = 1+t^2 > 0$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1+t^2 & 2+t \\ 2+t & 5 \end{vmatrix} = (2t-1)^2 > 0, t \neq \frac{1}{2}$$

例：并求出t为何值时，二次型是正定的。

$$(1) x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

$$A_1 = 1 > 0$$

$$A_2 = 1 - t^2 > 0$$

$$A_3 = -5t^2 - 4t > 0$$

$$-\frac{4}{5} < t < 0$$

$$(2) x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$$

$$A_1 = 1 > 0$$

$$A_2 = 4 - t^2 > 0$$

$$A_3 = -t^2 + 30t - 105 > 0$$

无解