第九章 内积空间

§1 定义与基本性质

前面对线性空间的研究仅限于对其代数结构的研究.但我们以几何空间中的向量作为线性空间理论的一个具体模型，仅限于对代数结构的研究是不够的，还需要研究向量的度量性质，如长度、夹角等. 为此，我们需要在线性空间中引入一种新的结构，这就是“内积”.

定义4

设V是实数域$\mathbf{R}$上一线性空间，在V上定义了一个二元实函数，称为内积，记作(α,β)，它具有以下性质：

1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$; **(对称性)**

2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$; **(线性性)**

4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当$\alpha=0$时$(\alpha,\alpha)=0$.

其中α,β,γ是V中任意的向量， **(正定性)**

k是任意实数，这样的线性空间称为**欧几里得**(Euclid)**空间**.

简称**欧氏空间**.

欧氏空间即为带有内积的线性空间. 对线性空间的维数并无要求, 可以是有限维的, 也可以是无限维的. 本课程研究的是有限维的欧氏空间.

例1 在线性空间$\mathbf{R}^n$中，对于向量

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

定义内积

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n, \qquad (1)$$

显然，内积(1)适合定义中的条件.这样，$\mathbf{R}^n$就成为一个欧氏空间.

当$n=3$时，(1)式就是几何空间中向量的内积在直角坐标系中的坐标表达式.

例2 在闭区间$[a, b]$上的所有实连续函数所成的空间$C[a, b]$中，对于函数$f(x), g(x)$定义内积

$$(f, g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

由定积分的性质不难证明，对于内积(2)，$C[a, b]$构成构成一欧几里得空间.

类似地，线性空间$\mathbf{R}[x]$, $\mathbf{R}[x]_n$，对于内积(2)也构成欧几里得空间.

欧几里得空间的基本性质

1）$(\alpha,k\beta)=(k\beta,\alpha)=k(\alpha,\beta)=k(\beta,\alpha).$

2）$(\alpha,\beta+\gamma)=(\beta+\gamma,\alpha)=(\beta,\alpha)+(\gamma,\alpha)$

$$=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma).$$

3）$(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma).$

定义2

非负实数$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$称为向量α的**长度**，记为$|\alpha|$.

也称为α的**范数**.

注1 对于任意非零向量α, $|\alpha|>0$.

$$\alpha=0\Leftrightarrow|\alpha|=0.$$

注2 $|k\alpha|=|k||\alpha|$.

注3 长度为1的向量称为**单位向量**.

如果$\alpha\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$

为一个单位向量.通常称为 α **的单位化**.

定理(柯西 - 布涅柯夫斯基不等式)

设 α,β 为欧氏空间V中任意两个非零向量，则

$$|(\alpha,\beta)|\le|\alpha||\beta|.$$

当且仅当α,β线性相关时，等号才能成立.

证明： 当$\beta=0$时，结论自然成立. 下设$\beta\neq 0$.

构造向量 $\gamma=\alpha+t\beta$. 则

$$(\gamma,\gamma)=(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)\ge 0,\quad \forall t\in \quad .$$

即

$$(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)t^2\ge 0,\quad \forall t\in \quad .$$

所以它的判别式$\Delta=4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\le 0.$

即$|(\alpha,\beta)|\le|\alpha||\beta|.$

上页 下页 返回 结束

显然当 α,β 线性相关时，等号成立.

反之若等号成立，则关于t的一元二次方程

$$(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)t^2=0$$

有唯一解

$$t_0=\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}.$$

此时对于向量 $\gamma_0=\alpha+t_0\beta$, 有

$$(\gamma_0,\gamma_0)=0,$$

所以 $\gamma_0=\alpha+t_0\beta=0$, 即

$$\alpha-\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=0,$$

故 α,β 线性相关.

注 上述定理对于一般欧氏空间都成立的. 而对于一些具体的欧氏空间，它有着具体的形式，而这些不等式已经为我们所熟知.

例如 在欧氏空间$\mathbf{R}^n$中的Cauchy不等式:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n|$$

$$\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}.$$

又如 在$C[a, b]$中，Cauchy－Schwarz不等式:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{1/2}$$

注 根据柯西—布涅柯夫斯基不等式，我们有三角不等式

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|.$$

事实上，

$$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta, \alpha+\beta)$$

$$= (\alpha,\alpha) + 2(\alpha,\beta) + (\beta,\beta)$$

$$\le |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$$

$$= (|\alpha| + |\beta|)^2.$$

所以$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$.

定义3

设 α,β 为欧氏空间V中任意两个非零向量,

$$<\alpha,\beta>=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|},\quad 0\le\langle\alpha,\beta\rangle\le\pi$$

称为向量 α,β 的夹角.

定义4

如果向量α,β 的内积为零，即

$$(\alpha,\beta)=0,$$

则α,β 称为**正交的**或**互相垂直的**，记为$\alpha\perp\beta$.

注 显然 $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}.$

在欧氏空间中同样有勾股定理，即当α,β正交时，

$$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$

事实上，

$$\begin{aligned}|\alpha+\beta|^2&=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)\\&=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\\&=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)\\&=|\alpha|^2+|\beta|^2.\end{aligned}$$

不难将勾股定理推广到多个向量的情形，即如果向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交，则

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_m|^2.$$

有限维欧氏空间中的内积

设V是一个n维欧氏空间，在V中取一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对$V$中任意两个向量

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i,$$

则

$$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j).$$

令

$$a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j),i,j=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i,j=1}^{n}x_i y_j a_{ij}.$$

利用矩阵，(α,β) 还可以写成

$$(\alpha,\beta)=X^T AY,$$

其中

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

分别是α,β 的坐标，

而矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n}$$

称为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的**度量矩阵**.

上面讨论表明：在知道了一组基的度量矩阵后，任意两个向量的内积就可以通过坐标来计算，因而度量矩阵完全确定了内积.

不同基下度量矩阵之间的关系

设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是空间V的另外一组基，而由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为C，即

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C.$$

于是基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的度量矩阵

$$B=(b_{ij})=((\eta_i,\eta_j))=C^TAC.$$

也可写成

$$B=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}(\eta_1\quad \eta_2\quad \cdots\quad \eta_n)=C^T\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1\quad \varepsilon_2\quad \cdots\quad \varepsilon_n)C=C^TAC.$$

度量矩阵的性质

度量矩阵是正定的.

事实上，对于非零向量α，即坐标向量 $X \neq 0$，

$$X^T AX = (\alpha, \alpha) > 0.$$

反之，给定一个n级正定矩阵及n维实线性空间的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，可以规定$V$上一个内积，使它成为欧氏空间，并且基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的度量矩阵为A.

§2 标准正交基

定义5

欧氏空间V中一组非零的向量，如果它们是两两正交的，则称为一组正交向量组.

注 应该指出，按定义，由单个非零向量所成的的正交向量组.

以下所讨论的正交向量组都是非空的.

命题

正交向量组是线性无关的.

证明： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为一正交向量组，

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

两边同时与 α_i 作内积，即得

$$k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0.$$

由于 $\alpha_i\neq 0$, 有 $(\alpha_i,\alpha_i)>0$, 从而有 $k_i=0(i=1,2,\cdots,m)$.
这就证明了 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性无关的.

推论 在 n 维欧氏空间中，两两正交的非零向量不可能超过 n 个.

定义6

在n维欧氏空间中，由n个向量组成的正交向量组称为**正交基**；由单位向量组组成的正交向量组称为**标准正交基**.

注1 对一组正交基进行单位化就可得到一组标准正交基.

注2 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是一组标准正交基，由定义，有

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

注3 若基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$满足：

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases}$$

则它就是一组标准正交基.

综上可知，一组基为标准正交基的充分必要条件是：它的度量矩阵为单位矩阵.

注4 设基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的度量矩阵为$A$，则 A 为正定阵，由二次型知识可知，存在可逆阵C，使得

$$C^T AC = E_n.$$

令

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C,$$

则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 也是一组基，且从$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵为C，于是基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵为$C^T AC = E_n$.

从而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$也就是一组标准正交基.

上述分析不仅说明了标准正交基的存在性，还给出了求标准正交基的一种方法.

注6　向量在标准正交基下的坐标

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基，则任一向量 $\alpha\in V$，则

$$\alpha=(\alpha,\varepsilon_1)\varepsilon_1+(\alpha,\varepsilon_2)\varepsilon_2+\cdots+(\alpha,\varepsilon_n)\varepsilon_n.$$

事实上，设

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,$$

两边同时与 ε_i 作内积，即得

$$x_i=(\alpha,\varepsilon_i),i=1,2,\cdots,n.$$

注7　标准正交基下的向量内积的计算

在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下，

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n.$$

则

$$(\alpha,\beta) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = X^TY.$$

标准正交基的求法

定理1

n维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组基.

证明： 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是正交向量组，我们对$n-m$作数学归纳法.

当$n-m=0$时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$就是一组正交基了.

假设$n-m=k$时定理成立，也就是说，可以找到向量$\beta_1,\cdots,\beta_k$，使得

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_k$$

成为一组正交基.

下证 $n-m=k+1$ 的情形.

因为 $m<n$，所以一定存在向量 β 不能被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，作向量

$$\alpha_{m+1}=\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_m\alpha_m.$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是待定的系数. 用 α_i 与 α_{m+1} 作内积，得

$$(\alpha_i,\alpha_{m+1})=(\beta,\alpha_i)-k_i(\alpha_i,\alpha_i)\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

取 $k_i=\dfrac{(\alpha_i,\beta)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\quad(i=1,2,\cdots,m)$. 则有

$$(\alpha_i,\alpha_{m+1})=0,\ (i=1,2,\cdots,m).$$

由 β 的选择可知，$\alpha_{m+1}\neq 0$.

因此$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$是一正交向量组.

由归纳假设,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$可以扩充一正交基.

于是定理得证.

注 上述定理的证明过程给出了一个具体求正交基的方法，即从任一个非零向量出发，按证明中的步骤逐个地扩充，最后就得到一个正交基. 再单位化，就得到一组标准正交基.

定理2

对于n维欧氏空间中任意一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，都可以找到一组标准正交基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使得

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i,)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),i=1,2,\cdots,n.$$

证明： 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是一组基，下面就逐个求出向量$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，

首先，取 $\eta_1=\dfrac{1}{|\varepsilon_1|}\varepsilon_1$. 显然 $L(\varepsilon_1)=L(\eta_1)$.

一般地，假定已经求出$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$，它们是单位正交的，具有性质

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i,)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),i=1,2,\cdots,m.$$

下一步来求η_{m+1}.

因为$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$，所以$\varepsilon_{m+1}$不能被$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$线性表出．按定理1证明中的方法，作向量

$$\xi_{m+1}=\varepsilon_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}(\varepsilon_{m+1},\eta_i)\eta_i.$$

显然

$$\xi_{m+1}\neq 0,\ 且\ (\xi_{m+1},\eta_i)=0, i=1,2,\cdots,m.$$

令

$$\eta_{m+1}=\frac{1}{|\xi_{m+1}|}\xi_{m+1}.$$

$\eta_1,\cdots,\eta_m,\eta_{m+1}$就是一单位正交向量组．同时

$$L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1})=L(\eta_1,\cdots,\eta_m,\eta_{m+1}),$$

由归纳法原理，定理2得证．

注1 定理2中要求

$$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i,)=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i),i=1,2,\cdots,n.$$

就相当于由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵是上三角形的.

注2 定理2中把一组线性无关的向量变成一单位正交向量组的方法称为Schimidt**正交化**.

例 把

$$\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(-1,0,0,1),$$
$$\alpha_3=(1,0,1,0),\alpha_4=(1,-1,-1,1)$$

变成单位正交的向量组.

解： 先把它们正交化，得

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0),$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0),$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1),$$

$$\beta_4 = \alpha_4 - \frac{(\alpha_4, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_4, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_4, \beta_3)}{(\beta_3, \beta_3)}\beta_3$$

$$= (1, -1, -1, 1).$$

再单位化，得

$$\eta_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0),$$

$$\eta_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0),$$

$$\eta_3 = (-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}),$$

$$\eta_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

标准正交基到标准正交基的过渡矩阵

设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$与$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$是欧氏空间$V$中的两组标准正交基，它们之间的过渡矩阵是$A=(a_{ij})$,即

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$是标准正交基，所以

$$(\eta_i,\eta_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, i=j, \\ 0, i\neq j. \end{cases}$$

于是

$$\delta_{ij}=(\eta_i,\eta_j)=(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\varepsilon_k,\sum_{l=1}^{n}a_{lj}\varepsilon_l)$$

$$=\sum_{k,l=1}^{n}a_{ki}a_{lj}(\varepsilon_k,\varepsilon_l)=\sum_{k,l=1}^{n}a_{ki}a_{lj}\delta_{kl}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj},$$

故 $AA^T=E$，或 $A^{-1}=A^T$.

定义7 n级实矩阵A称为正交矩阵，如果

$$AA^T=E.$$

由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵；

反之，如果第一组基是标准正交基是标准正交基，过渡矩阵是正交矩阵，则第二组基一定也是标准正交基.

注 正交矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$\Leftrightarrow AA^T=E$, 即

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{ni}a_{nj}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j, \\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

列向量组是一组单位正交的向量组

$\Leftrightarrow AA^T=E$, 即

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j, \\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

行向量组是一组单位正交的向量组

§3 同构

在第6章 线性空间中，我们证明了数域P上的n维线性空间V在代数结构上与P^n是相同的. 现在我们所研究的欧氏空间只是在线性空间中多加了一种结构：内积. 下面我们引入欧氏空间中的同构，类似的，所谓同构，就是结构上相同，这种相同用映射来反映，即两个欧氏空间之间可以建立一种双射，它不仅是保线性运算的，还是保内积的. 引入同构的概念之后，我们将证明实数域上任一n维欧氏空间都与$\mathbf{R}^n$（普通内积）是同构的.

定义8

实数域**R**上欧氏空间V与V'称为**同构的**，如果由V到V'有一个双射σ，满足

1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$,

2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$,

3) $(\alpha,\beta)=(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))$,

其中$\alpha,\beta\in V,k\in$ ，这样的映射σ称为V到V'的**同构映射**.

注 因为欧氏空间只是一种多了一种结构的线性空间，所以欧氏空间之间的同构映射也是作为线性空间的同构映射.因此，同构的欧氏空间必有相同的维数.

命题

任一n维欧氏空间都与$\mathbf{R}^n$同构.

证明： 设V为n维欧氏空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为$V$中一组标准正交基，构造映射

$$\sigma : V \to \quad {}^n,$$

对于任意$\alpha \in V$，设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$，则

$$\sigma(\alpha) = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

容易验证σ 确为一个同构映射.

欧氏空间中的映射的性质

1 反身性；

2 对称性；

3 传递性.

事实上，欧氏空间中的恒等映射是自身到自身的同构映射.

同构映射的逆仍是同构映射.

两个同构映射的复合仍是同构映射.

定理3

两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数相同.

我们可以按同构关系将所有欧氏空间进行分类，每一类的任何两个空间都是同构的，而属于不同类的两个欧氏空间是不同构的. 现在每一类中选取一个代表空间，由定理3可知，这种分类方法实际上就是按维数分类，所以选取的最简单的代表空间当然应该是$\mathbf{R}^n$. 所以我们只要弄清楚$\mathbf{R}^n$的结构，就弄清楚了它所在的类，即所有n维欧氏空间的结构.

§4 正交变换

定义9

欧氏空间V的线性变换$\mathcal{A}$称为正交变换，如果它保持向量的内积不变，即对于任意的$\alpha,\beta\in V$，都有

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta).$$

正交变换的充分必要条件

定理4

设$\mathcal{A}$是n维欧氏空间V的一个线性变换，于是下面四个命题是相互等价的：

1）$\mathcal{A}$是正交变换，即保内积；

2）A保持向量的长度不变，即对于 $\forall \alpha \in V$,

$$|\mathcal{A}\alpha| = |\alpha|.$$

3）如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是标准正交基，则 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基，即$\mathcal{A}$将标准正交基变成标准正交基；

4）$\mathcal{A}$在任一标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

证明：

首先证明1）与2）等价.

$(1)\Rightarrow(2)$

如果$\mathcal{A}$是正交变换，则对于$\forall\alpha\in V$,

$$|\mathcal{A}\alpha|^2=(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\alpha)=(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2,$$

故$|\mathcal{A}\alpha|=|\alpha|$.

$(2)\Rightarrow(1)$ 对于$\forall\alpha,\beta\in V$,

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\alpha)=(\alpha,\alpha),$$

$$(\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\beta)=(\beta,\beta),$$

$$(\mathcal{A}(\alpha+\beta),\mathcal{A}(\alpha+\beta))=(\alpha+\beta,\alpha+\beta).$$

于是将最后的等式展开即得

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\alpha)+2(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)+(\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\beta)$$

$$=(\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta)$$

$$=(\mathcal{A}(\alpha+\beta),\mathcal{A}(\alpha+\beta))$$

$$=(\alpha+\beta,\alpha+\beta).$$

$$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta),$$

再利用 $(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\alpha)=(\alpha,\alpha)$, $(\mathcal{A}\beta,\mathcal{A}\beta)=(\beta,\beta)$ 即得

$$(\mathcal{A}\alpha,\mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta).$$

再来证明1）与3）等价.

$(1) \Rightarrow (3)$

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是一组标准正交基，则

$$(\mathcal{A}\varepsilon_i, \mathcal{A}\varepsilon_j) = (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases} (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

由此可知, $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基.

$(3) \Rightarrow (1)$

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是一组标准正交基，则 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots,$ $\mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是一组标准正交基，于是对于 $\forall \alpha, \beta \in V$，设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n,$$

则

$$\mathcal{A}\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathcal{A}\varepsilon_i, \mathcal{A}\beta = \sum_{j=1}^{n} y_j\mathcal{A}\varepsilon_j.$$

于是

$$(\mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}\beta) = (\sum_{i=1}^{n} x_i\mathcal{A}\varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathcal{A}\varepsilon_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\mathcal{A}\varepsilon_i, \mathcal{A}\varepsilon_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i = (\alpha, \beta).$$

即$\mathcal{A}$为正交变换.

最后证明3）与4）等价

$(3) \Rightarrow (4)$

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是一组标准正交基，则 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots,$ $\mathcal{A}\varepsilon_n$ 也是一组标准正交基，而$\mathcal{A}$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，即

$$(\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)A. \qquad （1）$$

则A即为由标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到标准正交基 $\mathcal{A}\varepsilon_1,$ $\mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 的过渡矩阵，由此可知 A为正交阵.

$(4) \Rightarrow (3)$

由上述分析可知，如果A为正交矩阵，则由（1）式所确定的 $\mathcal{A}\varepsilon_1, \mathcal{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathcal{A}\varepsilon_n$ 为标准正交基.

注1 因为正交矩阵是可逆的，所以正交矩阵是可逆的． 由定义不难看出，正交变换实际上就是一个欧氏空间到它的自身同构映射．

注2 在标准正交基下，正交变换与正交矩阵对应． 由此可知，可由正交变换的性质得到一些正交矩阵的的性质：

1） 正交矩阵的逆仍是正交矩阵；

2） 两个正交矩阵的乘积仍是正交矩阵．

正交矩阵（正交变换）的分类及其几何意义

若A是正交矩阵，则由 $A^T A = E$ 可知

$$|A|^2 = |A^T||A| = |A^T A| = |E| = 1,$$

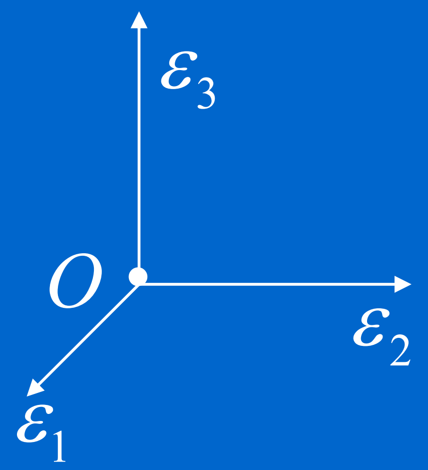
即$|A| = \pm 1.$

若$|A| = 1$，则称相应的正交变换为**旋转**，或者称为**第一类的**；

若$|A| = -1$，则称相应的正交变换为**第二类的.**

以三维几何空间为例，我们知道可以建立两种直角坐标系，右手系的或左手系的.

先来看右手直角坐标系的概念，所谓建立直角坐标，实际上就是先选取一定点O，再选取三个两两正交的单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，使之满足右手法则．然后定义向量的坐标，而向量 α 的坐标实际上就是 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标.



而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 显然就是一组标准正交基，

选取另外三个两两正交的单位向量 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$，不难利用向量的向量积或混合积验证：

若从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 的过渡矩阵A的行列式等于 1，则以 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 建立的直角坐标系是右手系的.

若从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 的过渡矩阵A的行列式等于-1，则以 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3'$ 建立的直角坐标系就是左手系的.

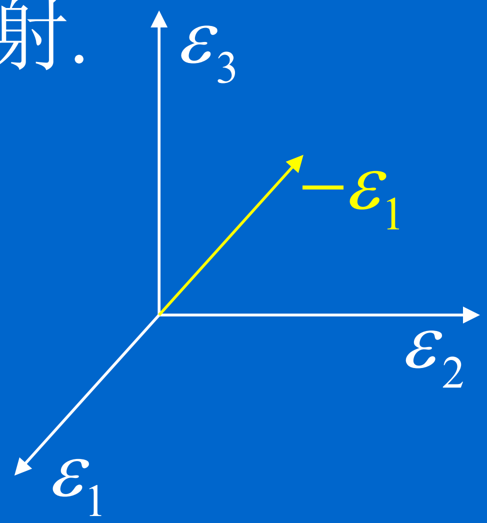
三维几何空间中的右手系和左手系的概念可以广到一般n维欧氏空间中，只是没有了右手法则和左手法则这样直观的表示. 于是我们就直接按过渡矩阵的行列式列的符号（即等于+1还是−1）对n 维欧氏空间中的的标准正交基进行分类. 欧氏空间（也可用于线性空间）中所有的基分为两类：先选取一组基，凡是与它的过渡矩阵大于零的基属于一类，反之，与它的过渡矩阵小于零的基属于另一类.

例 在欧氏空间中任取一组标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，定义线性变换$\mathcal{A}$为

$$\mathcal{A}\varepsilon_1=-\varepsilon_1,\mathcal{A}\varepsilon_i=\varepsilon_i,i=2,\cdots,n.$$

则$\mathcal{A}$就是一个第二类的正交变换.

从几何上看，这个一个镜面反射.



§5 子空间

定义10

设V_1，V_2是欧氏空间V中两个子空间.如果对于任意的$\alpha \in V_1, \beta \in V_2$,恒有

$$(\alpha, \beta) = 0.$$

则称V_1，V_2为正交的，记为$V_1 \perp V_2$.

一个向量α，如果对于任意的$\beta \in V_1$, 恒有

$$(\alpha, \beta) = 0.$$

则称α与V_1为正交的，记为$\alpha \perp V_1$.

注 若$V_1 \perp V_2$，则$V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

事实上，设$\alpha \in V_1 \cap V_2$, 则

$$(\alpha, \alpha) = 0,$$

由此可知$\alpha = 0$, 从而$V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

类似地，若$\alpha \in V_1$，且$\alpha \perp V_1$，则$\alpha = 0$.

定理5

如果子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交，则和

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$$

是直和.

证明： 设 $\alpha_i \in V_i, i = 1, 2, \cdots, s$, 且

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = 0.$$

上式两边同时与 α_i 作内积，利用正交性即有

$$\alpha_i = 0, i = 1, 2, \cdots, s.$$

即零向量的分解是唯一的，从而和

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_s$$

是直和.

定义11

子空间V_2称为子空间V_1的一个正交补，如果

$$V_1 \perp V_2, \text{且} V_1 + V_2 = V.$$

注1 显然，如果V_2是V_1的正交补，则V_1也是V_2的正交补.

注2 在证明了V_1的正交补存在性与唯一性之后，记V_1的正交补为$V_1^{\perp}$.

定理6

n维欧氏空间V的每一个子空间V_1都有唯一的正交补.

证明： 如果$V_1=\{0\}$，则它的正交补就是V，此时唯一性是显然的.

设$V_1\neq\{0\}$. 欧氏空间的子空间在所定义的内积之下也是一个欧氏空间. 在V_1中取一组正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$, 由定理1，它可以扩充成$V$的一组正交基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n.$$

显然，子空间$L(\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_n)$就是$V_1$的正交补.

再来证唯一性.设V_2，V_3都是V_1的正交补.

于是

$$V=V_1\oplus V_2,$$

$$V=V_1\oplus V_3,$$

任取 $\alpha\in V_2$, 由第二式有

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_3,$$

其中$\alpha_1\in V_1,\alpha_3\in V_3$. 因为$\alpha\perp\alpha_1$, 所以

$$0=(\alpha,\alpha_1)=(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_1)+(\alpha_3,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_1).$$

即 $\alpha_1=0$. 由此得知$\alpha\in V_3$, 即$V_2\subset V_3$.

同理可证$V_3\subset V_2$. 因此$V_2=V_3$, 唯一性得证.

推论

$V_1^{\perp}$ 恰由所有与V_1正交的向量组成.

即

$$V_1^{\perp} = \{\alpha \in V \mid \alpha \perp V\}.$$

命题

由分解式

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$$

可知，V中任一向量α都可以唯一地分解成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

其中$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_1^{\perp}$. 称$\alpha_1$为向量$\alpha$在子空间$V_1$上的的**内射影**.

§6 实对称矩阵的标准形

在第五章我们得到，任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵，即存在可逆矩阵C使

$$C^T AC$$

成对角形．现在利用欧氏空间和特征值与特征向量理论，第五章中关于实对称矩阵的结果可以加强为：

对于任意一个n级实对称矩阵A，都存在一个 n即正交矩阵T，使

$$T'AT = T^{-1}AT$$

成对角形，显然这个对角形不仅与A是合同的，而且与A是相似的．

引理1

设A是实对称矩阵，则A的特征值全为实数.

证明： 设λ_0是A的特征值，于是有非零向量

$$\xi=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

使得

$$A\xi=\lambda_0\xi.$$

令$\overline{\xi}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)^T$，其中$\overline{x}_i$为$x_i$的共轭复数，则

$$\overline{A\xi}=\overline{\lambda_0}\overline{\xi}.$$

A对称

A是实的

考察等式

$$\lambda_0\overline{\xi}'\xi=\overline{\xi}'(A\xi)=\overline{\xi}'A'\xi=(A\overline{\xi})'\xi=(\overline{A\xi})'\xi=\overline{\lambda_0}\overline{\xi}'\xi.$$

又因为ξ是非零向量，

故

$$\bar{\xi}'\xi = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n \neq 0$$

从而 $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$，即 λ_0 是一个实数.

对应于实对称矩阵A，在n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$上定义一个线性变换$\mathcal{A}$如下：

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

显然$\mathcal{A}$在标准正交基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵就是A.

引理2

设A是实对称矩阵，$\mathcal{A}$的定义如上，则对任意的$\alpha,\beta\in {}^{n}$，有

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta),$$

或

$$\beta^T A\alpha=\alpha^T A\beta.$$

证明：

$$\beta^T A\alpha=\beta^T A^T\alpha=\boxed{(A\beta)^T\alpha}=\boxed{[(A\beta)^T\alpha]^T}=\alpha^T A\beta.$$

A对称

是一个实数，视为一个1×1的矩阵

定义12

设$\mathscr{A}$为欧氏空间V上的线性变换，若对于任意$\alpha,\beta\in V$，都有

$$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta),$$

则称为$\mathscr{A}$为**对称变换**，或**自伴随变换**.

引理3

设$\mathscr{A}$是对称变换，V_1是$\mathscr{A}$的不变子空间，则$V_1^{\perp}$也是$\mathscr{A}$的不变子空间.

证明: 任取$\alpha \in V_1^{\perp}$，要证$\mathscr{A}\alpha \in V_1^{\perp}$，即要证对于任意的$\beta \in V_1$，都有$\mathscr{A}\beta \in V_1$，故$(\alpha, \mathscr{A}\beta) = 0.$ 因此，

$$(\mathscr{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathscr{A}\beta) = 0.$$

即$\mathscr{A}\alpha \perp V_1$，$\mathscr{A}\alpha \in V_1^{\perp}$，$V_1^{\perp}$也是$\mathscr{A}$的不变子空间.

引理3

设A是实对称矩阵，则$\mathbf{R}^n$中属于A的不同特征值的特征向量必正交.

证明： 设λ,μ 是A的两个不同的特征值，α,β 分别是属于λ,μ的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha, A\beta=\mu\beta$.

定义$\mathbf{R}^n$中线性变换 $\mathcal{A}$：$\mathcal{A}x=Ax$，$x\in\mathbf{R}^n$.

于是$\mathcal{A}\alpha=\lambda\alpha, \mathcal{A}\beta=\mu\beta$. 由于$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$，有

$$\lambda(\alpha,\beta)=\mu(\alpha,\beta),$$

因为$\lambda\neq\mu$，所以$(\alpha,\beta)=0$，即α,β正交.

定理7

对于任意一个n级实对称矩阵A，都存在一个n级正交矩阵T，使得

$$T'AT = T^{-1}AT$$

成对角形.

证明： 由实对称阵和对称变换的关系，只要证明明对称变换$\mathscr{A}$有n个特征向量做成的标准正交基即可.

对空间的维数n作归纳法.

$n=1$时，显然定理的结论成立.

设 $n-1$时定理的结论成立.对n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$，线性变换$\mathscr{A}$有一特征向量α_1，其特征值为实数λ_1.

将α_1单位化，还用α_1代表它．作$L(\alpha_1)$的正交补，设为V_1.

由引理3，V_1是$\mathscr{A}$的不变子空间，其维数为$n-1$. 又$\mathscr{A}|V_1$显然也是对称变换，由归纳假设，$\mathscr{A}|V_1$有$n-1$个特征向量$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$作为V_1的标准正交基.

从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$\mathbf{R}^n$的标准正交基，又是$\mathscr{A}$的$n$个特征向量．定理得证.

定理7中正交矩阵T的求法

在定理的证明过程中我们利用矩阵A在$\mathbf{R}^n$中定义了一个线性变换 $\mathcal{A}$，求正交变换T的问题就相当于在$\mathbf{R}^n$中求一组由$\mathcal{A}$的特征向量构成的标准正交基.

事实上，设

$$\eta_1=\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, \eta_1=\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \eta_n=\begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{pmatrix}$$

是$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基，它们都是A的特征向量.

显然，由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$到$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵就是

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

T就是一个正交矩阵，且

$$T'AT=T^{-1}AT$$

成对角形.

正交矩阵T的计算步骤

1.求出A的特征值.设$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$是$A$的全部不同的特征值.

2.对于每个λ_i, 解齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

求出一个基础解系，这就是$\mathcal{A}$的特征子空间V_{λ_i}的一组基：$\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{ik_i}$. 再作Schimidt正交化得

$$\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ik_i}$$

它就是V_{λ_i}一组标准正交基.

上页 下页 返回 结束

3.因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 两两不同，所以将它们各自的标准正交基合并起来

$$\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1k_1},\cdots\eta_{r1},\eta_{r2},\cdots,\eta_{rk_r}$$

即得$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基. 也是A的特征向量.

4.最后按顺序将3中所求的特征向量排成正交矩阵T，则

$$T'AT=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{k_1} & & & \\ & \lambda_2E_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_rE_{k_r}\end{pmatrix}.$$

例 已知

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求一正交矩阵T使得$T'AT(=T^{-1}AT)$成对角形.

解： 先求A的特征值.由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3),$$

即得A的特征值为1（三重），-3.

其次，求属于特征值1的特征向量．为此考虑线性方程组$(1E-A)X=0$，即

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

求得基础解系为

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1,1,0,0), \\ \alpha_2 = (1,0,1,0), \\ \alpha_3 = (-1,0,0,1). \end{cases}$$

把它正交化，得

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 = (1,1,0,0), \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0), \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 = (-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},1). \end{cases}$$

再单位化，得

$$\begin{cases} \eta_1 = (\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,0), \\ \eta_2 = (\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}},0), \\ \eta_3 = (-\dfrac{1}{\sqrt{12}},\dfrac{1}{\sqrt{12}},\dfrac{1}{\sqrt{12}},\dfrac{3}{\sqrt{12}}). \end{cases}$$

这就是属于三重特征值 1 的三个标准正交的特征向量.

再求属于-3的特征向量. 为此考虑齐次线性方程组$(3E-A)X=0$, 即

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

求得基础解系为

$$(1,-1,-1,1).$$

将它单位化得

$$\eta_4 = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

特征向量$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$构成$\mathbf{R}^4$的一组标准正交基，所求的正交矩阵为

$$T=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

而

$$T'AT=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}.$$

注 上例中可进一步要求$|T|=1$，甚即要求正交矩阵T是第一类的.

事实上，如果求得的正交矩阵T的行列式为-1，则取

$$S=\begin{pmatrix}-1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}.$$

于是$T_1=TS$是正交矩阵，且

$$|T_1|=|T||S|=1.$$

注2 如果线性替换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_1 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

的矩阵$C=(c_{ij})$是正交的，则它就称为**正交的线性替换**.

正交的线性替换显然是非退化的.

定理7的二次型语言描述

定理8

任意一个实二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,\quad (a_{ij}=a_{ji})$$

都可以经过**正交的线性替换**变成平方和

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中平方项的系数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$就是矩阵$A$的特征多项式全部的根.

正交变换（正交矩阵）的几何应用

——二次曲面的分类

在直角坐标系下，二次曲面的一般方程是

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$

$$+2b_1x+2b_2y+2b_3z+d=0.$$

令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

则上述方程可写成

$$X^TAX+2B^TX+d=0.$$

经过转轴，坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\quad \text{或者 } X = CX_1.$$

其中C为正交矩阵且$|C|=1$. 在新坐标系中，曲面的方程就是

$$X_1^T(C^TAC)X_1 + 2(B^TC)X_1 + d = 0.$$

由定理7及注可知，存在行列式为1的正交矩阵C使

$$C^TAC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

即可以作一转轴，使曲面在新坐标系下的方程为

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 y_1^2+\lambda_3 z_1^2+2\bar{b}_1 x_1+2\bar{b}_2 y_1+2\bar{b}_3 z_1+d=0,$$

其中

$$(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)=(b_1,b_2,b_3)C.$$

此时，再按照$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是否为零的情况，作适当的移轴与转轴就可以把曲面的方程化成标准方程.

例如： $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 全不为零.

作移轴 $\begin{cases} x_1=x_2-\dfrac{\bar{b}_1}{\lambda_1}, \\ y_1=y_2-\dfrac{\bar{b}_2}{\lambda_2}, \\ z_1=z_2-\dfrac{\bar{b}_3}{\lambda_3}, \end{cases}$ 此时曲面的方程为

$$\lambda_1 x_2^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 z_2^2+\bar{d}=0,$$

其中

$$\bar{d}=d-\frac{\bar{b}_1^2}{\lambda_1}-\frac{\bar{b}_2^2}{\lambda_2}-\frac{\bar{b}_3^2}{\lambda_3}.$$

§7 向量到子空间的距离最小二乘法

在解析几何中,两个点α和间的距离等于向量a-β的长度.在欧氏空间中我们
同样可引入

定义: 长度| α-β |称为向量α和β的距离,记为d(α,β).

不难证明距离的三条基本性质:

1) d(α,β)=d(β,α);

2)d(αβ)≥0,并且仅当α=β时等号才成立;

3)d(α,y)≤d(α,y)+d(γ,β)(三角形不等式)

中学所学几何中知道一个点到一个平面(或一条直线)上所有点的距离以垂线最短.

证明：一个固定向量和一个子空间中各向量间的距离也是以“垂线最短”。

先设一个子空间W,它是由向量α_i (i=1,2,…,k)所生成,一个向量α垂直于子空间W，就是指向量α垂直于W中任何一个向量.容易验证α垂直于W的充分必要条件是α垂直于每个α_i(i=1,2,…,k).

现给定β，设γ是W中的向量,满足$\beta-\gamma$垂直于W.要证明β到W中各向量的距离以垂线最短，就是要证明对W中任一向量δ，有$|\beta-\gamma|\le|\beta-\delta|$.

证明： $\beta-\delta=(\beta-\gamma)+(\gamma-\delta)$因W是子空间， γ， δ在W中， 则$\gamma-\delta$ inW. 故$\beta-\gamma$垂直于$r-\delta$.由勾股定理，

$|\beta-\gamma|^2+|\gamma-\delta|^2=|\beta-\delta|^2$， 故$|\beta-\gamma|\leq|\beta-\delta|$.
这就证明了,向量到子空间各向量间的距离以垂线最短!

例已知某种材料在生产过程中的废品率y与某种化学成分x有关.下列表中记载了某工厂生产中y与相应的x的几次数值:

y/%	1.00	0.9	0.9	0.81	0.60	0.56	0.35
x/%	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2

我们想找出y对x的一个近似公式.

解：把表中数值画出图来看,发现它的变化趋势近于一条直线，因此我们决定选取x的一次式ax+b来表达。当然最好能选到适当的a，b使得下列等式都成立

3.6a+6-1.00=0，
3.7a+6-0.9=0，
3.8a+6-0.9=0，
3.9a+6-0.81=0,
4.0a+6-0.60=0，
4.1a+6-0.56=0，
4.2a+6-0.35=0
都成立. 实际上是不可能的。任何a,b代入上面各式都发生些误差.于是想到找a，b使得上面各式的误差的平方和最小,即找a,b使
(3.6a+6-1.00)2+(3.7a+6-0.9)²+(3.8a+b-0.9)2+(3.9a+6-0.81)?+(4.0a+6-0.60)²+(4.1a+b-0.56)2+(4.2a+b-0.35)2
最小.这里讨论的是误差的平方即二乘方，故称为最小二乘法.

最小二乘法问题:

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s - b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ns}x_s - b_n = 0 \end{cases}$$

可能无解, 即任何一组数都可能使

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{is}x_s - b_1)^2$$

不等于零.

我们设法找x1,x2,…,xn使上式最小,这样的x1,x2,…,xn称为方程组的最小二乘解，这种问题就叫最小二乘法问题.