第十章 矩阵的相似标准型

§1 λ - 矩阵

设P是一个数域，λ是一个文字，作多项式环$P[\lambda]$，一个矩阵，如果它的元素是λ的多项式，即$P[\lambda]$的元素，就称为**λ—矩阵**.

我们把以数域 P中的数为元素的矩阵称为**数字矩阵**.

注 $P[\lambda]$元素可以左加，减，乘三种运算，但无除法运算.

定义1

如果λ－矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个r ($r\geq 1$)级子式不为零，而所以$r+1$级子式（如果有的话）全为零，则称 $A(\lambda)$ 的**秩**为 r. **零矩阵的秩**规定为零.

定义2

一个$n\times n$的λ－矩阵 $A(\lambda)$称为可逆的，如果有一个n×n的λ－矩阵 $B(\lambda)$ 使

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E, \qquad (1)$$

其中E是n级单位矩阵.

注 适合(1)的矩阵$B(\lambda)$（可以证明它是唯一的）称为$A(\lambda)$的**逆矩阵**，记为 $A^{-1}(\lambda)$.

定理1

一个$n\times n$的λ－矩阵 $A(\lambda)$ 是可逆的充分必要条件为行列式$|A(\lambda)|$是一个非零常数.

证明： 先证充分性.

设$d=|A(\lambda)|$是一个非零的数. $A^*(\lambda)$ 是$A(\lambda)$的的伴随矩阵，它也是一个λ－矩阵， 而

$$A(\lambda)\frac{1}{d}A^*(\lambda)=\frac{1}{d}A^*(\lambda)A(\lambda)=E,$$

因此，$A(\lambda)$ 可逆.

再证必要性.

如果 $A(\lambda)$ 可逆，即存在 $B(\lambda)$，使得

$$A(\lambda)B(\lambda)=E,$$

两边取行列式得

$$|A(\lambda)||B(\lambda)|=|E|=1.$$

而 $|A(\lambda)|$ 与 $|B(\lambda)|$ 都是 λ 的多项式，所以由它们的乘积是1可知，它们都是零次多项式，也就是非零常数.

§2 λ - 矩阵在初等变换下的标准形

定义3

下面的三种变换称为λ —矩阵的初等变换：

（1）矩阵的两行（列）互换位置；

（2）矩阵的某一行（列）乘以非零常数c；

（3）矩阵的某一行（列）加另一行（列）的$\varphi(\lambda)$倍，$\varphi(\lambda)$ 是一个多项式.

为什么不能乘以多项式?

和数字矩阵的初等变换一样，可以引入$\lambda-$矩阵的初等矩阵：

1）交换E的两行或两列 $P(i,j)$；

2）E的某一行（列）乘以非零常数c得 $P(i(c))$；

3）将单位矩阵的第j行的$\varphi(\lambda)$倍加到第i行上得

$$P(i,j(\varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \varphi(\lambda) & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

类似于数字矩阵，对$\lambda-$矩阵作初等行变换相当于左乘一个初等矩阵.

如果要对$s\times n$的$\lambda-$矩阵作何种初等变换，就先将这种初等变换施行于初等矩阵E_s，得到一个初等矩阵，再将所得到的初等矩阵左乘原来的$\lambda-$矩阵就相当于直接在原来的$\lambda-$矩阵作初等变换.

对$\lambda-$矩阵作初等列变换相当于右乘一个初等矩阵，并有相类似的结果.

与数字矩阵完全类似，此处不再赘述.

初等矩阵都是可逆的，且有

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j),$$

$$P(i(c))^{-1} = P(i(c^{-1})),$$

$$P(i,j(\varphi))^{-1} = P(i,j(-\varphi)).$$

规定某行（列）只能乘以一个非零常数，这是为了使 $P(i(c))$ 可逆.

定义4

$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$称为$B(\lambda)$等价，如果可以经过一系列初等变换将$A(\lambda)$化为$B(\lambda)$.

注1 等价是$\lambda-$矩阵之间的一种关系，这个关系显然具有下列三个性质：

（1）反身性：每一个$\lambda-$矩阵与自己等价；

（2）对称性：若$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，则$B(\lambda)$与$A(\lambda)$等价.（因为初等变换是可逆的）

（3）传递性：若$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，$B(\lambda)$与$C(\lambda)$等价，则$A(\lambda)$与$C(\lambda)$等价.

注2 应用初等变换与初等矩阵的关系可知，

矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价

$\Leftrightarrow$ 存在一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l, Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 使

$$A(\lambda) = P_1 P_2 \cdots P_l B(\lambda) Q_1 Q_2 \cdots Q_t .$$

引理

设$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$的左上角元素$a_{11}(\lambda)\neq 0$，并且$A(\lambda)$中至少有一个元素不能被它除尽，则一定可以找到一个与$A(\lambda)$等价的矩阵$B(\lambda)$，它的左上角元素也不为零，但是次数必$a_{11}(\lambda)$的次数低.

证明： 根据$A(\lambda)$中不能被$a_{11}(\lambda)$除尽的元素所在的位置，分三种情形来讨论：

1）若在$A(\lambda)$的第一列中有一个元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，则有

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

其中余式$r(\lambda)\neq 0$，且次数必$a_{11}(\lambda)$的次数低.

对$A(\lambda)$作初等行变换. 把$A(\lambda)$的第i行减去第j行的$q(\lambda)$倍，再将此矩阵的第1行与第i行互换，得

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = B(\lambda).$$

$B(\lambda)$左上角元素$r(\lambda)$符合引理的要求，

故$B(\lambda)$即为所求的矩阵.

2）在 $A(\lambda)$ 的第一行中有一个元素 $a_{1i}(\lambda)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽，这种情况的证明与（1）类似，但对 $A(\lambda)$ 进行的是初等列变换.

3）$A(\lambda)$ 的第一行与第一列中的元素都可以被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽，但 $A(\lambda)$ 中有另一个元素 $a_{ij}(\lambda)(i>1, j>1)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽.

设 $a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)$. 对 $A(\lambda)$ 作下述初等行变换：

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回 结束

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

第i行加上第一行的$\varphi(\lambda)$倍

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

第1行加上第i行

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda)+[1-\varphi(\lambda)]a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{1j}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = A_1(\lambda).$$

矩阵$A_1(\lambda)$的第一行中，有一个元素

$$a_{ij}(\lambda)+[1-\varphi(\lambda)]a_{1j}(\lambda)$$

不能被左上角元素$a_{11}(\lambda)$除尽，此时化为已经证明了的情况（2）.

定理2

任意一个非零的$s\times n$的$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$都等价于下列形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中$r\geq 1, d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$为首项系数为1的多项式，且

$$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)\quad (i=1,2,\cdots,r-1).$$

证明:

经过行列调动之后，可以使得$A(\lambda)$的左上角元素$a_{11}(\lambda)\neq 0$，如果$a_{11}(\lambda)$不能除尽$A(\lambda)$的全部元素，由引理，可以找到与$A(\lambda)$等价的$B_1(\lambda)$，它的左上角元素$b_1(\lambda)\neq 0$，并且次数比$a_{11}(\lambda)$低.

如果$b_1(\lambda)$还不能除尽$B_1(\lambda)$的全部元素，由引理又可以找到与$B_1(\lambda)$等价的$B_2(\lambda)$，它的左上角元素$b_2(\lambda)\neq 0$，并且次数比$b_1(\lambda)$低.

如此下去，将得到一系列彼此等价的$\lambda-$矩阵

$$A(\lambda), B_1(\lambda), B_2(\lambda), \cdots,$$

$$A(\lambda), B_1(\lambda), B_2(\lambda), \cdots,$$

它们的左上角元素皆不为零，而且次数越来越低. 但次数是非负整数，不可能无止境地降低. 因此在有限步之后，我们将终止于一个$\lambda-$矩阵$B_s(\lambda)$, 它的左上角元素 $b_s(\lambda)\neq 0$, 而且可以除尽 $B_s(\lambda)$ 的全部元素$b_{ij}(\lambda)$, 即

$$b_{ij}(\lambda) = b_s(\lambda) q_{ij}(\lambda),$$

对$B_s(\lambda)$作初等变换：

$$B_s(\lambda)=\begin{pmatrix} b_s(\lambda) & \cdots & b_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ b_{i1}(\lambda) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} b_s(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1(\lambda) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

在右下角的$\lambda-$矩阵$A_1(\lambda)$中，全部元素都可以被$b_s(\lambda)$除尽，因为它们都是$B_s(\lambda)$中元素的组合.

如果$A_1(\lambda)\neq O$，则对于$A_1(\lambda)$可以重复上述过程，进而把矩阵化成

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_2(\lambda) & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

其中$d_1(\lambda)$与$d_2(\lambda)$都是首项系数为1的多项式（$d_1(\lambda)$与$b_s(\lambda)$只差一个常数倍数），而且

$$d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda),$$

而且$d_2(\lambda)$能除尽$A_2(\lambda)$的全部元素.

如此下去，$A(\lambda)$最后就化成了所要求的形式.

最后化成的这个矩阵称为$A(\lambda)$的标准形.

例 用初等变换化$\lambda-$矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda+1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

为标准形.

解： $A(\lambda)$ 第三列加上第一列

$$\to\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ 1+\lambda^2 & \lambda^3+\lambda+1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^3+\lambda+1 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

第一列与第三列互换

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 1 & \lambda^3+\lambda+1 & 1+\lambda^2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

第三行减去第一行

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda^3-\lambda & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

第二列加上第一列的$1-2\lambda$倍

第三列加上第一列的$\lambda-1$倍

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda\end{pmatrix}$$

第一列与第二列互换

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3-\lambda \end{pmatrix}$$

第三列加上第二列$-\lambda$倍

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

第三行加上第二行$-(\lambda+1)$倍

第三列乘以（- 1）

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix} = B(\lambda).$$

§3 不变因子

定义5

设λ－矩阵$A(\lambda)$的秩为r，对于正整数k，$1 \le k \le r$，$A(\lambda)$中必有非零的k级子式．$A(\lambda)$ 中全部 k 级子式的首项系数为1的最大公因子$D_k(\lambda)$称为$A(\lambda)$ 的**k级行列式因子**.

注 由定义可知，对于秩为r的$\lambda-$矩阵，行列式因子一共有r个.

行列式因子的意义在于，它在初等变换下是不变的.

定理3

等价的$\lambda-$矩阵具有相同的秩与相同的各级行列式因子.

证明： 我们只需证明，$\lambda-$矩阵经过一次初等变换，秩与行列式因子是不变的.

设 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 经过一次初等行变换变成 $B(\lambda)$, $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 分别为 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的k级行列式因子. 下面证明 $f=g$. 分三种情形讨论:

（1） $A(\lambda)$ 经交换矩阵的两行变成 $B(\lambda)$.

此时，$B(\lambda)$ 的每个k级子式或者等于 $A(\lambda)$ 的某个 k 级子式，或者与 $A(\lambda)$ 的某个k 级子式反号.

因此 $f(\lambda)$是 $B(\lambda)$ 的k级子式的公因式，从而

$$f(\lambda)\,|\,g(\lambda).$$

上页 下页 返回 结束

（2）$A(\lambda)$ 的某行乘以非零常数c变成 $B(\lambda)$.

此时，$B(\lambda)$ 中每个k级子式或者等于$A(\lambda)$ 的某一个k级子式，或者等于 $A(\lambda)$ 的某一个k级子式的c倍.

因此 $f(\lambda)$是 $B(\lambda)$的k级子式的公因式，从而

$$f(\lambda) \mid g(\lambda).$$

（3）$A(\lambda)$ 经过某行的$\varphi(\lambda)$倍加到另一行变成$B(\lambda)$.

此时，$B(\lambda)$ 中那些包含i行与j行的k级子式和那些不包含i行的k级子式都等于$A(\lambda)$ 中对应的k级子式；

$B(\lambda)$ 中那些包含i行但不包含j行的k级子式，按i行分成两部分，而等于 $A(\lambda)$ 的一个k级子式与另一个k级子式的$\pm\varphi(\lambda)$ 的和，也就是$A(\lambda)$ 两个k级子式的组合.

因此 $f(\lambda)$是 $B(\lambda)$的k级子式的公因式，从而

$$f(\lambda)\mid g(\lambda).$$

对于列变换，可类似证明.

总之，如果 $A(\lambda)$ 经过一次初等变换变成 $B(\lambda)$，则 $f(\lambda)\mid g(\lambda)$.

但由初等变换的可逆性，$B(\lambda)$ 也可以经过一次变换变成 $A(\lambda)$.

由上面的讨论，同样应有 $g(\lambda)\mid f(\lambda)$.

于是 $f(\lambda)=g(\lambda)$.

当 $A(\lambda)$ 的全部 k 级子式为零时，$B(\lambda)$ 的全部 k 级子式也就等于零；反之亦然．因此，$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 既有相同的各级行列式因子，又有相同的秩.

标准形矩阵的行列式因子的计算

设标准形为

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

其中$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$是首项系数为1的多项式，

且$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,r)$.

不难证明，在这种形式的矩阵中，如果一个k级子式包含的行与列的标号不完全相同，则这k级子式一定为零.

因此，为了计算k级行列式因子，只要看第i_1, i_2, $\cdots, i_k$ 行与$i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列$(1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r)$ 组成的k级子式就行了，而这个k级子式

$$d_{i_1}(\lambda) d_{i_2}(\lambda) \cdots d_{i_k}(\lambda).$$

显然，这种k级子式的最大公因式就是

$$d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_k(\lambda).$$

定理4

$\lambda-$矩阵的标准形是唯一的.

证明： 设

$$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\} \qquad (1)$$

为$A(\lambda)$的标准形. 由于$A(\lambda)$与（1）等价，则它们有相同的秩与相同的行列式因子，因此，$A(\lambda)$的秩就是标准形的主对角线上非零元素的个数 r；$A(\lambda)$ 的 k 级行列式因子就是

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda), \quad k = 1, 2, \cdots, r. \qquad (2)$$

于是

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda),\ d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \cdots, d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}. \qquad (3)$$

由此可知，$A(\lambda)$ 的标准形

$$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$$

的主对角线上的非零元素是被 $A(\lambda)$ 的行列式因子所唯一决定的，所以 $A(\lambda)$ 的标准形是唯一的.

定义6

标准形的主对角线上非零元素

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$$

称为 $A(\lambda)$ 的**不变因子**.

定理5

两个$\lambda-$矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的行列式因子，或者它们有相同的不变因子.

证明： 由行列式因子与不变因子之间的关系

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda),$$

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\ d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\cdots,d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}.$$

可知，行列式因子与不变因子是互相决定的.

因此，若两个矩阵有相同的各级行列式因子，就等于说它们有相同的各级不变因子.

必要性已由定理3证明.

下面证明充分性.

事实上，若$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的不变因子，则$A(\lambda)$与$B(\lambda)$和同一个标准形等价.

因而$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价.

注 由

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\ d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\ \cdots,d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

可知，

$$D_k(\lambda)\mid D_{k+1}(\lambda)\ (k=1,2,\cdots,r-1)$$

在计算行列式因子时，常常是先计算最高级的行列式因子. 这样，由上式就大致有了低级行列式因子的范围.

可逆$\lambda-$矩阵的标准形

设 $A(\lambda)$ 为一个$n\times n$可逆矩阵，由定理1知，

$$|A(\lambda)|=d\neq 0.$$

即$D_n(\lambda)=1.$

于是由$D_k(\lambda)\,|\,D_{k+1}(\lambda)$ 可知

$$d_k(\lambda)=1, k=1,2,\cdots,n.$$

因此，可逆矩阵的标准形是单位矩阵E.

反之，与单位矩阵等价的矩阵一定是可逆的.

因为它的行列式是一个非零的数.

综上可知，矩阵可逆的充分必要条件是它与单位矩阵等价.

定理6

矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是它可以表成一些初等矩阵的乘积.

证明:

矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的等价的充分必要条件是有一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l, Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$, 使

$$A(\lambda) = P_1 P_2 \cdots P_l B(\lambda) Q_1 Q_2 \cdots Q_t.$$

特别地，当 $B(\lambda) = E$ 时，就得定理6的结论.

推论

两个$s\times n$的$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充分必要条件为，有一个$s\times s$可逆矩阵$P(\lambda)$与一个$n\times n$可逆矩阵$Q(\lambda)$，使

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda).$$

§4 矩阵相似的条件

引理1

如果有$n\times n$数字矩阵P_0, Q_0使

$$\lambda E - A = P_0(\lambda E - B)Q_0,$$

则 A与B相似.

证明： 因为

$$\lambda E - A = P_0(\lambda E - B)Q_0 = \lambda P_0 Q_0 - P_0 B Q_0,$$

两端比较后可知,

$$P_0 Q_0 = E, P_0 B Q_0 = A.$$

由此$Q_0 = P_0^{-1}$, 而$B = P_0 A P_0^{-1}$.

故A与B相似.

引理2

对于任何不为零的$n\times n$数字矩阵A和λ－矩阵$U(\lambda)$与$V(\lambda)$，一定存在λ－矩阵$Q(\lambda)$与$R(\lambda)$，以及数字矩阵U_0和V_0使

$$U(\lambda)=(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0, \qquad (2)$$

$$V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0. \qquad (3)$$

证明：

将$U(\lambda)$改写成

$$U(\lambda)=D_0\lambda^m+D_1\lambda^{m-1}+\cdots+D_{m-1}\lambda+D_m.$$

其中$D_0,D_1,\cdots,D_m$都是$n\times n$数字矩阵，且$D_0\neq 0.$

若$m=0$，则令$Q(\lambda)=0$及$U_0=D_0$，它们显然满足引理2的要求.

若$m>0$，令

$$Q(\lambda)=Q_0\lambda^{m-1}+Q_1\lambda^{m-2}+\cdots+Q_{m-2}\lambda+Q_{m-1},$$

其中Q_j都是待定的数字矩阵.

于是

$$(D_0\lambda^m+D_1\lambda^{m-1}+\cdots+D_{m-1}\lambda+D_m)-U_0=$$

$$\begin{aligned}(\lambda E-A)Q(\lambda)=Q_0\lambda^m&+(Q_1-AQ_0)\lambda^{m-1}+\cdots\\&+(Q_k-AQ_{k-1})\lambda^{m-k}+\cdots\\&+(Q_{m-1}-AQ_{m-2})\lambda-AQ_{m-1},\end{aligned}$$

上页 下页 返回 结束

故欲使（2）时成立，只需取

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= D_0, \\
Q_1 &= D_1 + AQ_0, \\
Q_2 &= D_2 + AQ_1, \\
&\cdots\cdots \\
Q_k &= D_k + AQ_{k-1}, \\
&\cdots\cdots \\
Q_{m-1} &= D_{m-1} + AQ_{m-2}, \\
U_0 &= D_m + AQ_{m-1}
\end{aligned}
$$

即可.

用完全类似的方法可以求出 $R(\lambda)$ 和 V_0.

定理7

设A，B是数域P上两个$n\times n$矩阵，A与B相似的充分必要条件是它们的特征矩阵$\lambda E-A$与$\lambda E-B$等价.

证明： 由定理6的推论知，$\lambda E-A$与$\lambda E-B$等价

$\Leftrightarrow$ 有可逆的$\lambda-$矩阵 $U(\lambda)$ 与 $V(\lambda)$, 使

$$\lambda E-A=U(\lambda)(\lambda E-B)V(\lambda).$$

先证必要性.

设A与B相似，即有可逆矩阵T，使

$$A=T^{-1}BT.$$

于是

$$\lambda E - A = \lambda E - T^{-1}BT = T^{-1}(\lambda E - B)T.$$

从而$\lambda E - A$与$\lambda E - B$等价.

再证充分性.

设$\lambda E - A$与$\lambda E - B$等价，即有可逆的$\lambda-$矩阵$U(\lambda), V(\lambda)$使得

$$\lambda E - A = U(\lambda)(\lambda E - B)V(\lambda). \qquad (4)$$

由引理2，存在$\lambda-$矩阵$Q(\lambda)$与$R(\lambda)$, 以及数字矩阵U_0和V_0使得

$$U(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0, \qquad (5)$$

$$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E - A) + V_0. \qquad (6)$$

将（4）改写为 **事实上，后面的证明说明了这是不可能的**

$$U(\lambda)^{-1}(\lambda E-A)=(\lambda E-B)V(\lambda),$$

再将 $V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0$ 代入，并移项得

$$[U(\lambda)^{-1}-(\lambda E-B)R(\lambda)](\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_0.$$

若 $V_0\neq O$, 则上式右端的次数为1.

若$V_0=O$，则$U(\lambda)^{-1}-(\lambda E-B)R(\lambda)=O.$

因此$U(\lambda)^{-1}-(\lambda E-B)R(\lambda)$ 是一个数字矩阵，记为T,

即

$$T=U(\lambda)^{-1}-(\lambda E-B)R(\lambda), \tag{7}$$

$$T(\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_0. \tag{8}$$

下证T是可逆的.由（7）有

$$
\begin{aligned}
E &= U(\lambda)T + U(\lambda)(\lambda E - B)R(\lambda) \\
&= U(\lambda)T + (\lambda E - A)V(\lambda)^{-1}R(\lambda) \\
&= [(\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0]T + \\
&\quad (\lambda E - A)V(\lambda)^{-1}R(\lambda) \\
&= U_0T + \underline{(\lambda E - A)[Q(\lambda)T + V(\lambda)^{-1}R(\lambda)]}.
\end{aligned}
$$

上述右端的第二项必须为零，否则它的次数≥1，

由于E和U_0T都是数字矩阵，等式不可能成立.

因此

$$\lambda E - A = T^{-1}(\lambda E - A)V_0,$$

再由引理1知，A与B相似.

矩阵A的特征矩阵$\lambda E - A$的不变因子就简称为A的不变因子．于是我们有下面的推论：

推论

矩阵A与B相似的充分必要条件是它们有相同的不变因子.

注 $n \times n$矩阵的特征矩阵的秩一定是n.

因此，$n \times n$矩阵的不变因子总是有n个，并且它们的乘积就等于这个矩阵的特征多项式.

以上结果说明，不变因子是矩阵的相似不变量，因此我们可以把一个线性变换的任一矩阵的不变因子（它们与该矩阵的基选取无关）定义为此线性变换的不变因子.

令人感到高兴的是，现在我们又找出了两个相似不变量：**不变因子与行列式因子**．重要的是它们中间的一个相等都可以作为两个矩阵相似的充分必要条件，这正是我们所期望的．一方面，我们可以根据这两个量去判别两个矩阵是否相似；另一方面，给定一个矩阵，我们可以根据它们去构造出与其相似的具有最简单形式的矩阵.

§5 初等因子

上一节结束时，我们指出两个矩阵的行列式因子或不变因子相等可以作为它们相似的充分必要条件. 这就为我们在第七章留下来的问题（如何写出与已知矩阵相似，且具有最简单形式的矩阵）提供了解决的方法. 即给定矩阵 A，算出它的不变因子（或行列式因子），构造最简单形式矩阵J，使之与A具有相同的的不变因子（或行列式因子）.

事实上，根据不变因子（或行列式因子）直接去写矩阵是不容易的，这一点由不变因子（或行列式因子的定义与计算就可以看出来.

（不变因子是标准形的主对角线元素，而且这些元素是一个整除一个，这一点要求太强了）

为此，我们引入一个新的概念：**初等因子**.一方面，它与不变因子之间可以互相决定（从而它的相等也是矩阵相似的充分必要条件），另一方面，容易根据初等因子去直接构造矩阵.

以下所讨论的数域P是复数域.

定义7

把矩阵A（或线性变换$\mathscr{A}$）的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，所有这些一次因式方幂（相同的必须按出现的次数计算）称为矩阵A（或线性变换$\mathscr{A}$）的**初等因子**.

例 设12级矩阵的不变因子是

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9个},(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1),(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2.$$

按定义，它的初等因子有7个，即

$$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda+1),(\lambda-1)^2,(\lambda+1),(\lambda+i)^2,(\lambda-i)^2.$$

初等因子与不变因子之间的关系

假设n级矩阵A的不变因子

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$$

为已知. 将$d_i(\lambda)\ (i=1,2,\cdots,n)$分解成互不相同的一次因式方幂的乘积:

$$d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{1r}},$$

$$d_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{2r}},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{n1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{n2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{nr}},$$

则其中对应于$k_{ij}\geq 1$的那些方幂

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}\quad (k\geq 1)$$

就是A的全部初等因子.

注意到不变因子有一个除尽一个的性质，即

$$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \quad (i=1,2,\cdots,n-1),$$

从而有

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}} \mid (\lambda-\lambda_j)^{k_{i+1,j}} (i=1,2,\cdots,n-1; j=1,2,\cdots,r).$$

因此，在$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 的分解式中，属于同一个一次因式的方幂的指数有递升的性质，即

$$k_{1j} \le k_{2j} \le \cdots \le k_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,r).$$

这说明，同一个一次因式的方幂作成的初等因子中，方次最高的必定出现在$d_n(\lambda)$的分解中，方次次高的出现在$d_{n-1}(\lambda)$的分解中.

如此顺推下去，可知属于同一个一次因式的方幂的初等因子在不变因子的分解式中出现的位置是唯一确定的.

如何根据初等因子和矩阵的级数唯一确定不变因子

设一个n级矩阵的全部初等因子为已知，在全部初等因子中将同一个一次因式

$$(\lambda-\lambda_j)(j=1,2,\cdots,r)$$

的方幂的那些初等因子按降幂排列，而且当这些初等因子的个数不足n时，就在后面补上适当个数的1，使得凑足n个. 设所得排列为

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_{nj}},(\lambda-\lambda_j)^{k_{n-1,j}},\cdots,(\lambda-\lambda_j)^{k_{1j}}$$

$$(j=1,2,\cdots,r)$$

于是令

$$d_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{ir}},$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

则$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$就是$A$的全部不变因子.

综上所述，不变因子和初等因子可以相互确定.由此不难得到：

定理8

两个同级复数矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

直接求初等因子的方法

引理3

如果多项式$f_1(\lambda), f_2(\lambda)$都与$g_1(\lambda), g_2(\lambda)$互素，则

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda))(g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

证明： 令

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = d(\lambda),$$

$$(f_1(\lambda), f_2(\lambda)) = d_1(\lambda),$$

$$(g_1(\lambda), g_2(\lambda)) = d_2(\lambda),$$

显然，$d_1(\lambda) \mid d(\lambda), d_2(\lambda) \mid d(\lambda).$

由于$(f_1(\lambda), g_1(\lambda)) = 1$，故$(d_1(\lambda), d_2(\lambda)) = 1.$

因而$d_1(\lambda)d_2(\lambda) \mid d(\lambda)$.

另一方面，由于$d(\lambda) \mid f_1(\lambda)g_1(\lambda)$, 可令

$$d(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda),$$

其中$\underline{f(\lambda) \mid f_1(\lambda)}, g(\lambda) \mid g_1(\lambda)$.

因为$(f_1(\lambda), g_2(\lambda)) = 1$, 所以$(f(\lambda), g_2(\lambda)) = 1$.

再由$f(\lambda) \mid f_2(\lambda)g_2(\lambda)$可知$\underline{f(\lambda) \mid f_2(\lambda)}$. 因而

$$f(\lambda) \mid (f_1(\lambda), f_2(\lambda)) = d_1(\lambda).$$

同理$g(\lambda) \mid d_2(\lambda)$.

所以$f(\lambda)g(\lambda) \mid d_1(\lambda)d_2(\lambda)$. 即$d(\lambda) \mid d_1(\lambda)d_2(\lambda)$.

从而$d(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)$.

引理4

设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

若多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 互素，则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价.

证明:

显然，$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的二级行列式因子.

而 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的一级行列式因子分别为

$$d(\lambda) = (f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)),$$

$$d'(\lambda) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda))(g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

由引理3可知$d(\lambda) = d'(\lambda)$.

因而 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 也有相同的一级行列式因子.

所以$A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价.

定理9

首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda E - A$ 为对角形式，然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，则所有这些一次因式的方幂（相同的按出现的次数计算）就是A的全部初等因子.

注

这就告诉我们在求初等因子时，不必一定要将特征矩阵化成标准形(主对角线上元素一个整除一个)，只需化成对角形，再按一次式分解就可以.显然这要方便的多，例如若A为对角形$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则它的全部初等因子即为$\lambda-\lambda_i, i=1,2,\cdots,n.$

证明： 设 $\lambda E - A$ 已用初等变换化为对角形

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix} h_1(\lambda) & & & \\ & h_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中每个$h_i(\lambda)$的最高次项的系数都为1．将$h_i(\lambda)$分解成互不相同的一次因式方幂的乘积：

$$h_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{ir}}$$

$$(i=1,2,\cdots,n).$$

上页 下页 返回 结束

下证对于每个相同的一次因式的方幂

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_{1j}},(\lambda-\lambda_j)^{k_{2j}},\cdots,(\lambda-\lambda_j)^{k_{nj}}$$

$$(j=1,2,\cdots,r).$$

在 $D(\lambda)$的主对角线上按递升幂次排列后，得到的新对角矩阵 $D'(\lambda)$与$D(\lambda)$ 等价. 此时 $D'(\lambda)$就是$\lambda E-A$的标准形，而且所有不为1的$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}$ 就是 A的全部初等因子.

为方便起见，先对$\lambda-\lambda_1$的方幂进行讨论. 令

$$g_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}(\lambda-\lambda_3)^{k_{i3}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{ir}}$$

$$(i=1,2,\cdots,n).$$

于是 $$h_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}g_i(\lambda),i=1,2,\cdots,n.$$

且每个$(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}$都与$g_j(\lambda)\ (j=1,2,\cdots,n)$ 互素.

如果有相邻的一对指数$k_{i1}>k_{i+1,1}$, 则在$D(\lambda)$中将$(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}$ 与$(\lambda-\lambda_1)^{k_{i+1,1}}$ 对调位置，而其余因式的位置不动. 根据引理4知

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}g_i(\lambda) & \\ & (\lambda-\lambda_1)^{k_{i+1,1}}g_{i+1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{k_{i+1,1}}g_i(\lambda) & \\ & (\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}g_{i+1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

等价.

从而$D(\lambda)$ 与对角矩阵

$$\operatorname{diag}\{(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}g_1(\lambda),\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{k_{i+1,1}}g_i(\lambda),$$

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}g_{i+1}(\lambda),\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{k_{n1}}g_n(\lambda)\}$$

等价.

然后对$D_1(\lambda)$作如上的讨论．如此继续进行，直到对角矩阵主对角线上元素所含$(\lambda-\lambda_1)$的方幂是按递升幂次排列为止.

依次对$\lambda-\lambda_2,\cdots,\lambda-\lambda_r$同样处理，最后便得到与$D(\lambda)$等价的对角矩阵$D'(\lambda)$，它的主对角线上所含每个相同的一次因式的方幂，都是按递升幂次排列的.

推论

设矩阵A为准对角形

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_s),$$

则所有$A_i, i=1,2,\cdots,s$ 的初等因子拼起来就得到 A的全部初等因子.

注1 上述推论的证明由定理9是显然的.

注2 上述推论对于不变因子而言显然是不成立的. 从而根据初等因子写出相应的矩阵可以分块处理.例如若已知全部初等因子为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}, i=1,2,\cdots,s,$ 则准对角形矩阵$\mathrm{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_s)$就是相应的矩阵，其中$J_i$ 的初等因子只有一个$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}(i=1,2,\cdots,s)$.

§6 若当标准形的理论推导

定义

形式为

$$J(\lambda,t)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{t\times t}$$

的矩阵称为**若当（Jordan）块**，其中λ为复数.

由若干个若当块组成的准对角形矩阵称为若当形矩阵.

若当形矩阵的一般形式

其中λ_1

若当块的初等因子

若当块

$$J_0=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

的全部初等因子是$(\lambda-\lambda_0)^n$.

事实上，考虑它的特征矩阵

$$\lambda E - J_0 = \begin{pmatrix} \lambda-\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda-\lambda_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

显然$|\lambda E - J_0| = (\lambda-\lambda_0)^n$，这就是$\lambda E - J_0$的$n$级行列式因子．由于$\lambda E - J_0$有一个$n-1$级子式为

$$\det\begin{pmatrix} -1 & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-\lambda_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

所以它的$n-1$级行列式因子是1.

从而它以下各级的行列式因子全是1. 因此，它的不变因子为

$$d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1, d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^n.$$

由此即得，$\lambda E-J_0$ 的初等因子是$(\lambda-\lambda_0)^n$.

若当形矩阵的初等因子

设

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

是一个若当形矩阵，其中

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i\times k_i} \qquad (i=1,2,\cdots,s).$$

J_i的初等因子为$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$ $(i=1,2,\cdots,s)$，故由上节最后的推论可知J的全部初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s}.$$

这就是说，每个若当形矩阵的全部初等因子就是由它的全部若当块的初等因子构成的.

由于每个若当块完全被它的级数n与主对角线上上的元素λ_0所刻画，而这两个数都反映在它的初等因子$(\lambda-\lambda_0)^n$中. 因此，若当块被它的初等因子唯一决定. 由此可见，若当形矩阵除去其中若当块排列的次序外被它的初等因子唯一决定.

定理10

每个n级的复数矩阵A都与一个若当形矩阵相似，且这个若当形矩阵除去其中若当块的排列次序外是被矩阵A唯一决定的，它称为A的**若当标准形**.

证明： 由上述分析易知.

求复矩阵A的若当标准形的步骤

1. 求出A的全部初等因子：

$$(\lambda-\lambda_1)^{k_1},(\lambda-\lambda_2)^{k_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$可能有相同的，指数$k_1,k_2,\cdots,k_s$也可能有相同的.

2. 每一个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$对应于一个若当块

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}_{k_i}\quad (i=1,2,\cdots,s).$$

3. 这些若当块构成一个若当形矩阵

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

J 即为A的若当标准形.

（这是因为J与A有相同的初等因子）

除了若当块的排列顺序外，J是唯一的.

例1 若复矩阵A的全部初等因子为

$$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda+1),(\lambda+1),(\lambda-i)^2,(\lambda+i)^2,$$

则A的若当标准形为

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & i & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & i & & \\
 & & & & & & & & & & -i & 0 \\
 & & & & & & & & & & 1 & -i
\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回 结束

例2 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的若当标准形.

解： 首先求 $\lambda E-A$ 的初等因子

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+3\lambda-2 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+3\lambda-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

因此，A的初等因子为$\lambda-1, (\lambda-1)^2$.

A的若当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理10的线性变换语言

定理11

设$\mathscr{A}$是复数域上n为线性空间V的线性变换，在V中必定存在一组基，使$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵是若当形矩阵，且该若当形矩阵除去其中若当块的排列次序外是被$\mathscr{A}$唯一决定的.

注 若当形矩阵包括对角矩阵作为特殊情形，即由一级若当块构成的若当形矩阵.

由此不难得到：

定理12

复数域矩阵A与对角矩阵相似的充分必要条件是A的初等因子全为一次的.

注 由若当标准形的作法，可以看出矩阵A的最小多项式就是A的最后一个不变因子$d_n(x)$.

由此不难得到：

定理13

复数域矩阵A与对角矩阵相似的充分必要条件是A的不变因子都没有重根.

最后指出，如果规定上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

为若当块，应用完全类似的方法可以证明相应的定理10，定理11的结论也成立.