

作业一

姓名_____学号_____

一、判断题

1. 零向量是线性相关的.()
2. 线性空间中的任意两个向量都可以相加或相减.()
3. 设 V 是 n 维向量空间, $\alpha, \beta \in V$, 则 $\alpha - \beta$ 不一定是 V 中的向量.()
4. 向量空间的基可能有无穷多个.()
5. 设 $\alpha \in V$, 则 α 在 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标可能不唯一.()

二、简答题

1. 什么是线性空间?
2. 零元素为什么是唯一的?
3. 什么是线性空间的基?

三、填空题

1. 数域 P 上的 n 次多项式组成的线性空间的一组基为_____.
2. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 0), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (0, 1, 1)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则 $\beta = (2, 0, 0)$ 在这组基下的坐标为_____.
3. 若 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 2), \alpha_2 = (1, 2, 0, 4)$ 是向量空间 V 的一组基, 则 V 的维数为_____.
4. 若 $\alpha_1 = (1, 3, -1), \alpha_2 = (3, x, -3)$ 是线性空间 V 的一组基, 则 $x =$ _____.

5. 若 $\alpha_1 = (5, -3, 1)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)$, $\alpha_3 = (0, x, 7)$ 不是3维线性空间 V 的一组基, 则 $x =$ _____.

四、计算题

1. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基, 判断 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_n$ 是否也是 V 的一组基?

2. 平面上全体向量做成的集合对于通常的加法和数乘 $k\alpha = 0$ 是一个向量空间吗?

3. 全体正实数对于如下定义的加法和数乘是一个向量空间吗:

$$a \oplus b = ab, ka = a^k.$$

4. 设 P 是数域, 求 $P^{n \times n}$ 中全体对称矩阵 (反对称、上三角) 矩阵做成的空间的基和维数。

5. 设 P 是数域, 说明方程组 $\sum_i a_{ij}x_j = b_i$ 的解集何时是 P^n 的子空间?