

作业三

姓名_____学号_____

一、判断题

1. 线性空间的和是直和的充要条件是零向量的分解是唯一的。()
2. 线性空间的同构关系不是一个等价关系。()
3. $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构。()
4. 若 $U \subseteq V$, 则一定存在 $W \subseteq V$, 使得 $V = U \oplus W$ 。()
5. 若 $V = V_1 + V_2$, 且 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 则 $V = V_1 \oplus V_2$ 。()

二、简答题

1. 什么是线性空间的直和?
2. 写出零向量的分解是唯一的等价条件?
3. 设 $\phi: W \rightarrow V$ 是线性空间同构. 证明 W 中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件是 $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \dots, \phi(\alpha_n)$ 线性相关.

三、综合题

1. 证明 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto e^x$ 是线性空间同构。

2. 设 $\mathbb{P}V_1$ 与 $\mathbb{P}V_2$ 分别是齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间，试证明： $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$.

3. 设 A 是数域 P 上的 n 阶可逆矩阵， A_1, A_2 分别表示 A 的前 r 行和 $n - r$ 行组成的矩阵。 W_1 与 W_2 分别表示齐次线性方程组 $A_1x = 0$ 与 $A_2x = 0$ 的解。判断是否有 $P^n = W_1 \oplus W_2$ 。