

作业五

姓名_____学号_____

一、判断题

1. 线性变换在一组基下的矩阵是可逆矩阵。()
2. 两个相似矩阵的行列式和秩必定相同。()
3. 相似的两个矩阵一定是等价的。()
4. 线性变换在不同的两组基下的矩阵一定相似。()
5. 可逆的线性变换把线性空间的一组基变为一组基()

二、简答题

1. 什么是矩阵的相似?
2. 什么是一个线性变换在一组基下的矩阵。
3. 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间, 证明 V 上线性变换构成的线性空间与线性空间 $M_n(P)$ 同构?

三、综合题

1. 设 $V = L(1, \sin x, \cos x)$, $\mathcal{A}$ 是 V 上的求导变换, 求 V 的维数以及 $\mathcal{A}$ 在基 $1, \cos x, \sin x$ 下的矩阵。
2. 证明: 与线性空间 V 上的所有线性变换都交换的线性变换只能是数乘变换。

3. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个映射, 其中 $\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 。

(a) 证明: $\mathcal{A}$ 是一个线性映射。

(b) 若 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3), \mathcal{A}(\alpha_4)$ 。

(c) 求 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \mathcal{A}(\alpha_3), \mathcal{A}(\alpha_4)$ 在基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。