作业七

姓名__________________学号_______________________

一、判断题

1. 有n个特征值的n阶矩阵可以对角化。( )
2. 不同特征值对应的特征向量一定是线性无关的。( )
3. 若n阶矩阵A可以对角化，则A必含有n个线性无关的特征向量。( )
4. 如果线性变换ϕ的特征多项式没有重根，则ϕ在某组基下的矩阵是对角的。( )
5. 属于同一个特征值的特征向量可能线性相关也可能线性无关。( )

二、简答题

1. 简述一个方阵可对角化的条件。

2. 什么是线性变换的核？

3. 证明有限维线性空间中的单射也是满射。

三、综合题

1. 求矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$的特征值和特征向量，并判断$A$是否可以对角化。若可以对角化，写出对角化矩阵。

2. 判断$A=\begin{pmatrix}a&1&0&\cdots&0&0\\0&a&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a&1\\0&0&0&\cdots&0&a\end{pmatrix}$是否可对角化，为什么？

3. 判断$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是否可对角化, 若可以对角化，试求出相应的可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵。

4. 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是$A$的$m$个不同的特征值，$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{is_i}$是$\lambda_i$的线性无关的特征向量，证明$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1s_1}, \cdots, \alpha_{m1}, \cdots, \alpha_{ms_m}$线性无关。