作业八

姓名__________________学号______________________

一、判断题

1. 在$\mathbb{R}^2$中, 对于任意$\alpha=(x_1,x_2)^T,\beta=(y_1,y_2)^T$, 若定义$(\alpha,\beta)=x_1y_1-x_2y_1+4x_2y_2$，则这是$\mathbb{R}^2$上的一个内积。(　)
2. 正交向量组必线性相关。(　)
3. 欧氏空间V中任意向量η,γ,且$(\eta,\gamma)=0$, 则η,γ线性无关。(　)
4. 欧氏空间V中任意向量η,γ,且$|\eta|=|\gamma|$, 则$\eta+\gamma$与$\eta-\gamma$正交。(　)
5. 欧氏空间V中任意向量$\eta,\frac{1}{|\eta|}$是V中一个单位向量。(　)

二、简答题

1. 简述内积的定义。

2. 证明欧式空间中不同基的度量矩阵是合同的。

3. 证明欧式空间V中, 两两正交的非零向量组成的集合是线性无关的。

三、综合题

1. 在欧几里得空间$\mathbb{R}^2$中,设$\alpha=(1,2)^T,\beta=(-1,1)^T$, 求向量$\gamma$, 使得$(\alpha,\gamma)=-1$,且$(\beta,\gamma)=3$。

2. 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$m$维欧几里得空间$V$的一个基。

   证明：(1)如果$\eta\in V$, 使得$(\eta,\lambda_i)=0,i=1,2,\ldots,m$, 那么$\eta=0$；

   (2)如果$\alpha_1,\alpha_2\in V$, 使得$\forall\alpha\in V$有$(\alpha_1,\alpha)=(\alpha_2,\alpha)$, 那么$\alpha_1=\alpha_2$。

3. 设$A=(a_{ij})$是一个n级正定矩阵。在$\mathbb{R}^n$中规定$(X,Y)=X^TAY$;

(1)说明$(\ ,\ )$是$\mathbb{R}^n$上的一个内积, 并指出这个内积在$\mathbb{R}^n$的标准基$\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots,\epsilon_n$下的度量矩阵。

(2)具体写出这个欧几里得空间R^n的柯西-布涅柯夫斯基不等式。