# 作业九

姓名____________________学号__________________________

一、判断题

1. 欧式空间的标准正交基是唯一的。( )

2. 正交矩阵是可逆阵。( )

3. 维数相同的欧氏空间一定同构。( )

4. 正交变换保持向量的正交性。( )

5. 正交矩阵的任意两列是线性无关的。( )

二、简答题

1. 给出正交矩阵的基本性质。

2. 什么是欧氏空间的同构？

3. 给出正交变换的等价条件。

三、综合题

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维欧几里得空间$V$的一个标注正交基，令

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),\beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),\beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3).$$

证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也是$V$的一个标准正交基。

2. 已知$A$是一个$3\times 5$的实矩阵, 求一个$5\times 2$的实矩阵$B$，使得$AB=0$,且$B$的列向量组是正交单位向量组, 其中$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. 设$V, W$是两个欧氏空间, 证明$f$是$V$到$W$的同构映射当且仅当$f$是一个线性映射, 且$f$是保持内积的满射。

4. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$是5维欧几里得空间$V$的一个标注正交基, $V$是由$\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_5, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4, \beta_3 = -\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5$生成的线性空间.

(1) 求$(\beta_i, \beta_j), 1 \leq i, j \leq 3$.

(2) 求$V$的一组标准正交基。