# 第五章　线性方程组的解法

——向量与矩阵范数、误差分析与迭代法

刘可伋

上海财经大学 数学学院

# 一、向量范数

定义：设函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，如果

（1）正则性：$f(x) \geq 0$，$\forall x \in \mathbb{R}^n$，等号当且仅当 $x = 0$ 时成立

（2）齐次性：$f(\alpha x) = |\alpha| \cdot f(x)$，$\forall x \in \mathbb{R}^n$，$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

（3）三角不等式：$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

称 $f$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的向量范数，记为 $\|\cdot\|$

# 1.1 常见的向量范数

（1）**1-范数**：$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

（2）**2-范数**：$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

（3）**p-范数**：$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$

（4）**∞–范数**：$\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$

# 1.2　向量范数的性质

## （1）连续性

**定理**：设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任一向量范数，则 $\|\cdot\|$ 关于 $x$ 的每个分量连续

## （2）等价性

**定理**：设 $\|\cdot\|_s$ 和 $\|\cdot\|_t$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任意两个范数，则 $\exists\ c_1, c_2$ 使下式成立

$$c_1\|x\|_s \le \|x\|_t \le c_2\|x\|_s,\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

（3）**Cauchy-Schwarz 不等式**

$$|(x, y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

# 1.3 向量序列的极限

**定义**：已知 $x^{(k)}=\left[x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right]^T$，$x^*=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，若

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

称 $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 $x^*$，记 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x^*$

**注记**：

1. 每个分量组成的序列都收敛
2. $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}=x^* \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-x^*\right\|=0$

## 二、矩阵范数

**定义**：设函数 $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$，如果

（1）**正则性**：$f(A) \geq 0$，$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，等号当且仅当 $A=0$ 时成立

（2）**齐次性**：$f(\alpha A) = |\alpha| \cdot f(A)$，$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

（3）**三角不等式**：$f(A+B) \leq f(A) + f(B)$

（4）**相容性**：$f(AB) \leq f(A) \cdot f(B)$

称 $f$ 为 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，记为 $\|\cdot\|$

# 2.1　常见的矩阵范数

（1）***F*–范数**：$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

（2）**算子范数**：$\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ x\neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$

# 2.2　常见的算子范数

（1）**1–范数（列范数）**：$\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

（2）**2-范数（谱范数）**：$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^\top A)}$

（3）**∞–范数（行范数）**：$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

# 2.3 矩阵范数的性质

## （1）连续性

**定理**：设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的任一向量范数，则 $\|\cdot\|$ 关于 $A$ 的每个分量连续

## （2）等价性

**定理**：设 $\|\cdot\|_s$ 和 $\|\cdot\|_t$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的任意两个范数，则 $\exists\ c_1, c_2$ 使下式成立

$$c_1\|A\|_s \leq \|A\|_t \leq c_2\|A\|_s, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

（3）若 $A$ 对称，则 $\|A\|_2 = \rho(A)$

（4） $\rho(A) \le \|A\|$

（5）对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \|\cdot\|_\varepsilon$，使 $\|A\|_\varepsilon \le \rho(A) + \varepsilon$

（6）**相容性：** $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$

（7）若 $\|A\| < 1$，则 $I \pm A$ 非奇异，且 $\|(I \pm A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1 - \|A\|}$

# 2.4 矩阵序列的极限

**定义**：已知 $A_k=\left[a_{ij}^{(k)}\right]_{n\times n}$，$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$，若

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}，\ i,j=1,2,\cdots,n$$

称 $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 $A$，记 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k=A$

**注记**：

**1.** 每个分量组成的序列都收敛

**2.** $\lim\limits_{k\to\infty} A_k=A \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|A_k-A\|=0$

**例**：设 $0<|a|<1$，考察以下矩阵序列的极限

$$A=\begin{bmatrix} a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix},\ A^2=\begin{bmatrix} a^2 & 2a\\ 0 & a^2\end{bmatrix},\ \cdots,\ A^k=\begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}\\ 0 & a^k\end{bmatrix},\ \cdots$$

# 2.5　矩阵极限判断

**定理：**

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0$$

**推论：**

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \|A_k\| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} A_k x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0 \Leftrightarrow \exists\ \|\cdot\|_\varepsilon \text{ 使得 } \|B\|_\varepsilon < 1$$

$$\rho(B) = \lim_{k\to\infty} \left\|B^k\right\|^{\frac{1}{k}}$$

$$\lim_{k\to\infty} B^k = 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1$$

# 三、误差分析

**定义**：考虑 $Ax=b$，若 $A$ 或 $b$ 的**微小变化**导致解的**巨大变化**，则称此线性方程组是**病态**的，并称 $A$ 是**病态**的，反之是**良态**的.

**例**：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 3.1 矩阵条件数

定义：设 $A$ 非奇异，

$$\mathrm{Cond}(A)_v = \|A^{-1}\|_v \|A\|_v$$

为 $A$ 的条件数，其中 $v$ 为 1，2，$\infty$

定理：考虑 $Ax = b$，设 $A$ 是精确的，$b$ 有微小扰动 $\delta b$，且 $A(x + \delta x) = b + \delta b$

注记：

1. 相对误差上界
2. 条件数越大，病态越严重

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\|A\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

定理：考虑 $Ax = b$，设 $b$ 是精确的，$A$ 有微小扰动 $\delta A$，此时解为 $x + \delta x$，

若 $\|A^{-1}\|\|\delta A\| < 1$，则

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \|A^{-1}\|\|A\|\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

当 $\delta A$ 充分小时，右端约为 $\|A^{-1}\|\|A\|\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

注记：条件数越大，病态越严重

常用条件数：

1. $\mathrm{Cond}(A)_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(A^\top A)}{\lambda_{\min}(AA^\top)}}$

2. $\mathrm{Cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty$

注： $\mathrm{Cond}(A)_2$ 为谱条件数，当 $A$ 对称时：

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \frac{\max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|}{\min\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|}$$

# 3.2　条件数性质

（1）$\mathrm{Cond}(A) = \|A^{-1}\|\|A\| \geq \|A^{-1}A\| = 1$

（2）$\mathrm{Cond}(\alpha A) = \mathrm{Cond}(A)$，$\alpha \in \mathbb{R}^{+}$

（3）若 $R$ 正交，则 $\mathrm{Cond}(R)_2 = 1$

（4）若 $R$ 正交，对任意非奇异阵 $A$

$$\mathrm{Cond}(AR)_2 = \mathrm{Cond}(RA)_2 = \mathrm{Cond}(A)_2$$

**例1** 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}$，计算 $\mathrm{Cond}(A)_\infty$ 和 $\mathrm{Cond}(A)_2$

**解:**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10001 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty \approx 4\times 10^4$$

$$\lambda(A) = \frac{2.0001 \pm \sqrt{2.0001^2 - 0.0004}}{2} > 0$$

$$\mathrm{Cond}(A)_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \approx 4\times 10^4$$

**例2** 计算 $\mathrm{Cond}(H_k)_\infty$，$H_k$ 为 $k$ 阶Hilbert阵

**解:**

(1) $k=1$， $\mathrm{Cond}(H_1)_\infty = 1$

(2) $k=2$，$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$，$H_2^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$，$\mathrm{Cond}(H_2)_\infty = 27$

(3) $k=3$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}，H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}，\mathrm{Cond}(H_3)_\infty = 748$$

# 3.3 常见病态情况

（1）若 A 在三角约化时出现小主元，对大多数矩阵来说，则 A 病态.

（2）系数矩阵 A 的行列式相对很小，或系数矩阵某些行近似线性相关，

则 A 可能病态.

（3）系数矩阵 A 元素间数量级相差很大，且无规律，则 A 可能病态.

**例3** 设

$$\begin{bmatrix}1 & 10^4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10^4\\ 2\end{bmatrix}$$

计算 $[x_1, x_2]^\mathsf{T}$

**解:**

（1）$\mathrm{Cond}(A)_\infty \approx 10^4$，直接计算结果：$[1,\ 0]^\mathsf{T}$ ✗

（2）考虑：$\begin{bmatrix}10^{-4} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{Cond}(\tilde{A})_\infty \approx 4$，计算结果：$[1,\ 1]^\mathsf{T}$ ✓

# 四、解的改善

（1）使用更高精度的数计算

（2）迭代提高精度：

第一步：$A\Delta x = b - Ax^{old}$ 解出 $\Delta x$

第二步：$x^{new} = x^{old} + \Delta x$

# 五、迭代法

基本思想：

$$Ax = b \quad \underset{M\text{ 非奇异}}{\overset{A = M - N}{\Longleftrightarrow}} \quad Mx = Nx + b \quad \Longleftrightarrow \quad x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

$$\boxed{\text{迭代格式：} \; x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, \quad k = 0,1,2,\cdots}$$

其中 $B = M^{-1}N$ 为迭代矩阵.

注记：1. 只需存储系数矩阵中非 0元素

2. 运算量不超过$O(kn^2)$，$k$ 为迭代步数

# 5.1 收敛性分析

**定义**：若 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ 存在，则迭代法**收敛**，否则**发散**.

**性质**：若 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$，则 $x^*$ 为 $Ax = b$ 的解，即 $Ax^* = b \Leftrightarrow x^* = Bx^* + f$

**定理**：对 $\forall x^{(0)}$，迭代 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 收敛的**充要条件**是 $\rho(B) < 1$

**提示**：**1.** $x^{(k)} - x^* = B^k\left(x^{(0)} - x^*\right)$，$\lim_{k\to\infty} B^k = 0 \Leftrightarrow \rho(B) < 1$

**2.** $\lim_{k\to\infty} B^k x = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = 0$

**定理**：设 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$，若存在算子范数使 $\|B\| = q < 1$，

（1）迭代收敛

（2）$\|x^{(k)} - x^*\| \le q^k \|x^{(0)} - x^*\|$

（3）$\|x^{(k)} - x^*\| \le \dfrac{q}{1-q} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$

（4）$\|x^{(k)} - x^*\| \le \dfrac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

# 5.2 收敛速度

第 $k$ 步误差：$\varepsilon^{(k)} := x^{(k)} - x^* = B^k\varepsilon^{(0)}$，故

$$\frac{\|\varepsilon^{(k)}\|}{\|\varepsilon^{(0)}\|} \le \|B^k\|$$

则平均每次迭代后的误差压缩率为：$\|B^k\|^{\frac{1}{k}}$

若要求 $k$ 步迭代后上述误差比值不超过 $\sigma$，则

估计大概迭代步数

$$\|B^k\| \le \sigma \Longrightarrow \|B^k\|^{\frac{1}{k}} \le \sigma^{\frac{1}{k}} \Longrightarrow \ln\|B^k\|^{\frac{1}{k}} \le \frac{1}{k}\ln\sigma \Longrightarrow \boxed{k \ge \frac{-\ln\sigma}{-\ln\|B^k\|^{\frac{1}{k}}}}$$

**定义**：迭代法 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 的**平均收敛速度**为：

$$R_k(B) = -\ln\left(\|B^k\|^{\frac{1}{k}}\right)$$

**渐近收敛速度**为：

$$R(B) = \lim_{k\to\infty} R_k(B) = -\ln\rho(B) = \ln\frac{1}{\rho(B)}$$

**注记**： $\rho(B)$ 越小，迭代收敛越快

# 5.3 Jacobi 迭代

注记：收敛 $\Leftrightarrow$ $\rho(J) < 1 \Rightarrow \|J\| < 1$

考虑 $Ax = b$，其中 $A$ 非奇异，且对角线元素全不为 0.

将 $A = D - L - U$，其中

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取 $M = D$，$N = L + U$，可得 Jacobi 迭代法

$$\boxed{x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0,1,2,\cdots}$$

迭代矩阵 $J := D^{-1}(L + U)$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}\right)/a_{nn} \end{cases}$$

思考：**1.** 如何停止？

**2.** 如何编程？

计算 $x_i^{(k+1)}$ 时，若用 $x_1^{(k+1)}$， $\cdots$， $x_{i-1}^{(k+1)}$ 代替 $x_1^{(k)}$， $\cdots$， $x_{i-1}^{(k)}$ 则**更好**！

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)/a_{nn} \end{cases}$$

# 5.4 Gauss-Seidel 迭代

注记：收敛 $\Leftrightarrow$ $\rho(G) < 1 \Rightarrow \|G\| < 1$

考虑 $Ax = b$，其中 $A$ 非奇异，且对角线元素全不为 0.

$$x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

迭代矩阵 $G := (D-L)^{-1}U$

分量形式：$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \Big/ a_{ii}$

思考：如何编程？

# 5.5 SOR 迭代

注记：1. 合适的 $\omega$ 收敛更快，但 $\omega$ 选取困难

2. 收敛 $\Leftrightarrow$ $\rho(L_\omega) < 1 \Rightarrow \|L_\omega\| < 1$

考虑 $Ax = b$，其中 $A$ 非奇异，且对角线元素全不为 0.

$$x^{(k+1)} = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]x^{(k)} + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

松弛因子

迭代矩阵 $L_\omega := (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U]$

分量形式：$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\Big/ a_{ii}$

思考：如何编程？

**例3** 分别用 Jacobi，G-S，SOR ($\omega = 1.1$) 求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$$

初始向量 $x^{(0)} = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$.

```
Jacobi迭代: 25 步, x = [2,3,-1]

Jacobi改进迭代: 11 步, x = [2,3,-1]
```

```
Gauss-Seidel迭代: 11 步, x = [2,3,-1]
```

```
SOR迭代: 8 步, x = [2,3,-1]
```

```matlab
clc, clear

%% 初始化
  A = [2 -1 0; -1 3 -1; 0 -1 2];
  b = [1;8;-5];
tol = 1e-5;
x(:,1) = zeros(size(A,1),1);
xm(:,1) = zeros(size(A,1),1);

B = A;
B(eye(size(A,1),'logical')) = 0; % 对角线元素赋值为0

%% Jacobi 迭代
n = 1;
while norm(b - A*x(:,n)) >= tol

    x(:,n+1) = ( b - B*x(:,n) )./diag(A);
    n = n+1;

end

fprintf('\n Jacobi迭代: %d 步, x = [%g,%g,%g]\n\n',n-1,x(1,end),x(2,end),x(3,end));

%% Jacobi 迭代改进
n = 1;
while norm(b - A*xm(:,n)) >= tol

    xx = xm(:,n);
    for k = 1: size(A,1)
        xm(k,n+1) = ( b(k) - B(k,:)*xx )./A(k,k);
        xx(k) = xm(k,n+1); % 更新 x_i^k 为 x_i^{k+1}
    end
    n = n+1;

end

fprintf('\n Jacobi改进迭代: %d 步, x = [%g,%g,%g]\n\n',n-1,xm(1,end),xm(2,end),xm(3,end));
```

Jacobi_iteration.m

```matlab
clc, clear

%% 初始化
  A = [2 -1 0; -1 3 -1; 0 -1 2];
  b = [1;8;-5];
tol = 1e-5;
x(:,1) = zeros(size(A,1),1);

L = tril(A,-1);
U = triu(A,1);

%% Gauss-Seidel 迭代
n = 1;
while norm(b - A*x(:,n)) >= tol

    xx = x(:,n);
    for k = 1: size(A,1)
        x(k,n+1) = ( b(k) - L(k,1:k-1)*xx(1:k-1) - U(k,k+1:end)*x(k+1:end,n) )./A(k,k);
        xx(k) = x(k,n+1); % 更新 x_i^k 为 x_i^{k+1}
    end
    n = n+1;

end

fprintf('\n Gauss-Seidel迭代: %d 步, x = [%g,%g,%g]\n\n',n-1,x(1,end),x(2,end),x(3,end));
```

Gauss_Seidel.m

# 5.6 收敛性分析

（1）$A$ 严格对角占优或不可约弱对角占优 $\Rightarrow$ Jacobi迭代和G-S迭代收敛

（2）设 $A$ 对称，$D$ 正定，Jacobi迭代收敛 $\Leftrightarrow$ $A$，$2D-A$ 都正定

（3）设 $A$ 对称，$D$ 正定，G-S迭代收敛 $\Leftrightarrow$ $A$ 正定

（4）SOR迭代收敛 $\Rightarrow$ $0<\omega<2$

（5）设 $A$ 对称正定，$0<\omega<2$ $\Rightarrow$ SOR迭代收敛

（6）设 $A$ 严格对角占优或不可约弱对角占优，$0<\omega\le 1$ $\Rightarrow$ SOR迭代收敛

**例4** 设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$，给出Jacobi迭代和G-S迭代收敛的充要条件.

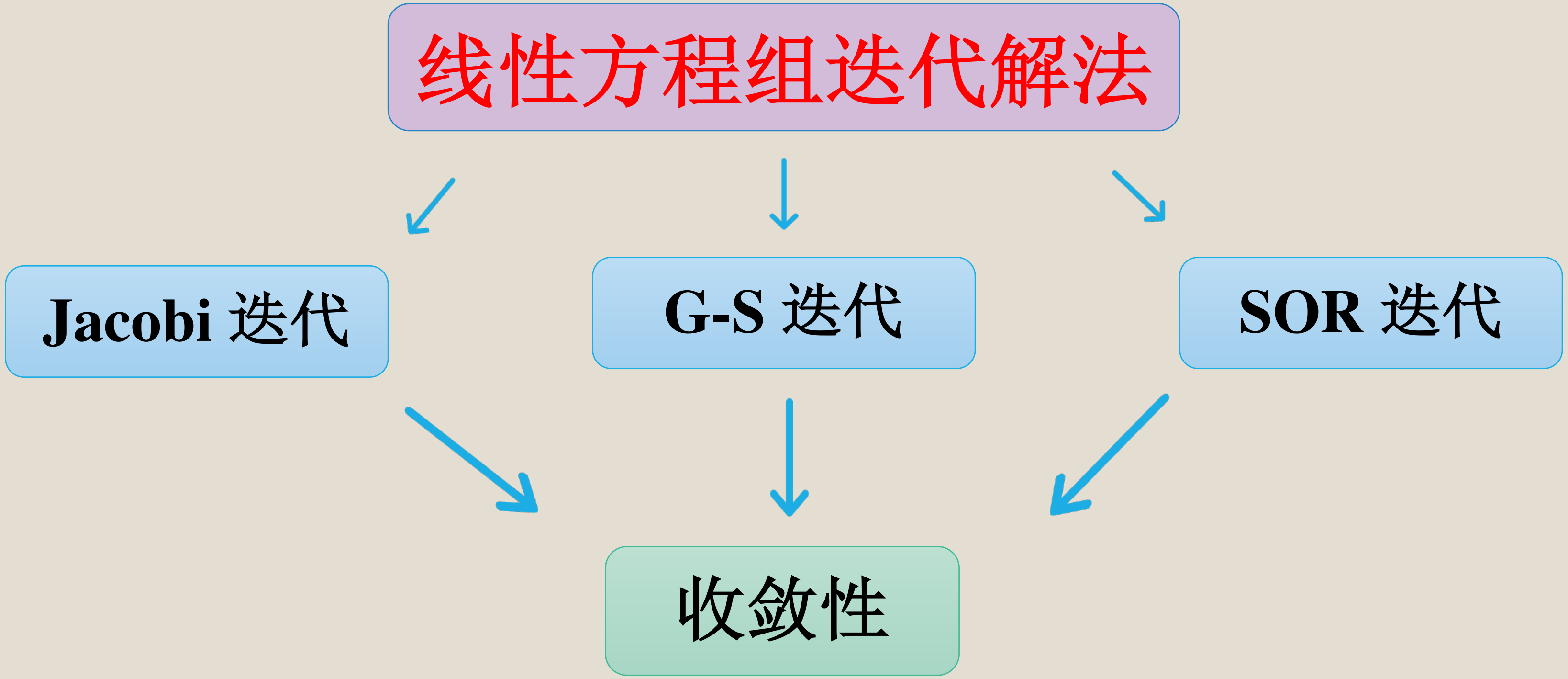
**解：** $A$ 正定 $\Leftrightarrow 1>0$，$1-a^2>0$，$(1-a)^2(1+2a)>0$，即 $-0.5<a<1$

$2D-A$ 正定 $\Leftrightarrow 1>0$，$1-a^2>0$，$(1+a)^2(1-2a)>0$，即 $-0.5<a<0.5$

Jacobi 迭代收敛 $\Leftrightarrow\ -0.5<a<0.5$

G-S 迭代收敛 $\Leftrightarrow\ -0.5<a<1$

# 小结



习题与编程题见课程网页：

**1、参考书目**

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

**2、网络学习资源**

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

**3、拓展性参考文献**

[1] H. Ammari et al., Optimal Shape Design by Partial Spectral Data, SIAM J. Scientific Computing 37(2015), B855-B883.