第六章

1. 用二分法确定方程$x^3-3x+1=0$最小正根所在的区间$[a,b]$，使之满足$K=\frac{M_2}{2m_1}<1$.

其中$M_2=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|, m_1=\min\limits_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|$.

解答：

令$f(x)=x^3-3x+1$，由于

$$f(0)=1>0, f(1)=-1<0$$

所以最小正根$x^*\in[0,1]$.

又由于

$$f'(x)=3x^2-3, f''(x)=6x$$

故有

$$m_1=\min_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|=0, M_2=\max_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right|=6$$

显然在$[0,1]$上不满足$K=\frac{M_2}{2m_1}<1$.

利用二分法计算

$$x_1=\frac{1}{2}(0+1)=0.5$$
$$f(0.5)=-0.375<0$$

所以$x^*\in[0,0.5]$.在区间$[0,0.5]$上有

$$m_1=\min_{0\le x\le 0.5}\left|f'(x)\right|=2.25$$

$$M_2=\max_{0\le x\le 0.5}\left|f''(x)\right|=3$$

$$K=\frac{M_2}{2m_1}=\frac{3}{4.5}=\frac{2}{3}<1$$

所以取最小正根所在区间为$[0,0.5]$满足要求.

2. 对于方程的单根α，已知 Newton 法具有下述的收敛速度：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-x_{n+1}}{\left(\alpha-x_n\right)^2}=-\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

其中$f'(\alpha)\neq 0, f(\alpha)=0$，且$x_n\to\alpha$.

证明：$R_n=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(x_{n-1}-x_{n-2})^2}$也收敛于$-\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$（当$n\to\infty$时）.

解答：

$$R_n=\frac{(\alpha-x_{n-1})-(\alpha-x_n)}{[(\alpha-x_{n-1})-(\alpha-x_{n-2})]^2}=\frac{\dfrac{\alpha-x_{n-1}}{(\alpha-x_{n-2})^2}-\dfrac{\alpha-x_n}{(\alpha-x_{n-2})^2}}{\left[\dfrac{\alpha-x_{n-1}}{\alpha-x_{n-2}}-1\right]^2} \qquad ①$$

由于$x_n\to\alpha$和$\dfrac{\alpha-x_{n+1}}{(\alpha-x_n)^2}\to-\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\neq\infty$，故

$$\frac{\alpha-x_{n+1}}{(\alpha-x_n)}\to 0,(n\to\infty)$$

则①式分子的

$$\frac{\alpha-x_{n-1}}{(\alpha-x_{n-2})^2}\to-\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)},(n\to\infty)$$

$$\frac{\alpha-x_n}{(\alpha-x_{n-2})^2}=\frac{\alpha-x_n}{\alpha-x_{n-1}}\cdot\frac{\alpha-x_{n-1}}{(\alpha-x_{n-2})^2}\to 0,(n\to\infty)$$

分母括号内

$$\frac{\alpha-x_{n-1}}{\alpha-x_{n-2}}\to 0,(n\to\infty)$$

故

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{(x_{n-1}-x_{n-2})^2}=-\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

3. 求方程$x^3-x^2-1=0$在$x_0=1.5$附近的一个根，设将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式.

（1）$x=1+\frac{1}{x^2}$，迭代公式$x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$；

（2）$x^3=1+x^2$，迭代公式$x_{k+1}=(1+x_k^2)^{1/3}$；

（3）$x^2=\frac{1}{x-1}$，迭代公式$x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$.

试分析每种迭代公式的收敛性，并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根.

解答：

取$x_0=1.5$的邻域$[1.3,1.6]$来考察.

（1）$x\in[1.3,1.6]$时

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2}\in[1.3,1.6],$$

$$|\varphi'(x)|=\left|-\frac{2}{x^3}\right|\le\frac{2}{1.3^2}=L<1$$

故迭代式$x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$在$[1.3,1.6]$上整体收敛.

（2）当$x\in[1.3,1.6]$时

$$\varphi(x)=(1+x^2)^{1/3}\in[1.3,1.6]$$

$$|\varphi'(x)|=\frac{2}{3}\left|\frac{x}{(1+x^2)^{2/3}}\right|\le\frac{2}{3}\frac{1.6}{[(1+1.3^2)]^{2/3}}\le L=0.5515<1$$

故$x_{k+1}=(1+x_k^2)^{1/3}$在$[1.3,1.6]$上整体收敛.

（3）$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$，$|\varphi'(x)|=\left|\frac{-1}{2(x-1)^{3/2}}\right|>\frac{1}{2(1.6-1)}>1$

故$x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$发散.

由于（2）的 L 较小，故取（2）中迭代式计算.要求结果具有四位有效数字，只需

$$|x_k-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

即

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-L}{L} \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}$$

取 $x_0 = 1.5$，计算结果见下表.

k	x_k	k	x_k
1	1.481248034	4	1.467047973
2	1.472705730	5	1.466243010
3	1.468817314	6	1.465876820

由于 $|x_6 - x_5| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$，故可取 $x^* \approx x_6 = 1.466$.

4. 用斯蒂芬森迭代法计算第 3 题中（2），（3）的近似根，精确到 10^{-5}.

解答：

记第 3 题中（2）的迭代函数 $\varphi_2(x) = (1+x^2)^{1/3}$，（3）的迭代函数为 $\varphi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$，利用斯蒂芬森迭代法，可计算得到如下结果：

k	加速 $\varphi_2(x)$ 的结果 x_k	k	加速 $\varphi_3(x)$ 的结果 x_k
0	1.5	0	1.5
1	1.465558485	1	1.467342286
2	1.465571233	2	1.465576085
		3	1.465571232

故（2）$x^* \approx 1.465571233$，（3）$x^* \approx 1.465571232$.

5. 应用牛顿法于方程 $x^3 - a = 0$，导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式，并讨论其收敛性.

解答：

设 $f(x) = x^3 - a, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$，牛顿迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0, f''(x) > 0$

当 $x < 0$ 时，$f'(x) > 0, f''(x) < 0$

因此，对于 $a > 0$，当 $x_0 > \sqrt[3]{a}$ 时，$f(x_0)f''(x_0) > 0$，牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

当 $x_0 \in (0, \sqrt[3]{a})$ 时，

$$x_1-\sqrt[3]{a}=\frac{2x_0^2+a}{3x_0^2}-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a}+2x_0)>0, x_1>\sqrt[3]{a}$$

从x_1起，牛顿序列$\{x_k\}$收敛到$\sqrt[3]{a}$.

对于$a<0$, 当$x_0<\sqrt[3]{a}<0$时, $f(x_0)f''(x_0)>0$, 由牛顿法产生的序列$\{x_k\}$单增趋于$\sqrt[3]{a}$.

当$x_0\in(\sqrt[3]{a},0)$时,

$$x_1-\sqrt[3]{a}=\frac{(\sqrt[3]{a}-x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a}+2x_0)<0, x_1<\sqrt[3]{a}$$

之后迭代也收敛.

当$a=0$时，迭代式变为$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3}{3x_k^2}=\dfrac{2}{3}x_k$

该迭代对任何$x_0\in R$均收敛，但收敛速度是线性的.

6. 应用牛顿法于方程$f(x)=1-\dfrac{a}{x^2}=0$，导出求$\sqrt{a}$的迭代公式，并用此公式求$\sqrt{115}$的值.

解答：

$f(x)=1-\dfrac{a}{x^2}, f'(x)=\dfrac{2a}{x^3}, x\neq 0$，所以牛顿迭代公式有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{1-\frac{a}{x_k^2}}{\frac{2a}{x_k^3}}=\frac{1}{2}x_k(3-\frac{x_k^2}{a}), k=0,1,2,\cdots$$

易知$f''(x)=-\dfrac{6a}{x^4}<0$，故取$x_0\in(0,\sqrt{a})$时，迭代收敛.

对于$\sqrt{115}$，取$x_0=9$，迭代计算，得

$$\begin{aligned}&x_1=10.33043478, x_2=10.70242553,\\&x_3=10.7237414, x_4=10.72380529,\\&x_5=10.72380529,\end{aligned}$$

故$\sqrt{115}\approx 10.72380529$.