第三章　函数逼近

——正交多项式

刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、函数正交

定义：已知 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数，若

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,dx=0$$

称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交.

定义：已知 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots \in C[a,b]$，$\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数，若

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ A_k>0, & j=k\end{cases}$$

称 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交函数族.

注记：$A_k\equiv 1$，称标准正交函数族

例1 三角函数族

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cdots$$

是 $[-\pi,\pi]$ 上带权 $\rho(x)=1$ 的正交函数族.

证明:

$$(1,1)=\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi \qquad (\cos nx, \sin mx)=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx \sin mx\,dx = 0$$

$$(1,\cos mx)=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos mx\,dx = 0 \qquad (1,\sin mx)=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin mx\,dx = 0$$

$$(\cos nx, \cos mx)=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx \cos mx\,dx = \pi\delta_{nm}$$

$$(\sin nx, \sin mx)=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx \sin mx\,dx = \pi\delta_{nm}$$

二、正交多项式

定义：设 $\varphi_k(x)$ 是首项系数$a_k \neq 0$的k次多项式，$\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数，若

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ A_i>0, & i=j\end{cases}$$

称 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的 k 次正交多项式.

性质1：设 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式，H_n 为次数不超过 n 的多项式组成的线性空间，则

$$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$$

构成 H_n 的一组基.

思考：

1. 如何构造正交多项式族？

2. 为什么构成一组基？

性质2：设 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式，对 $\forall P(x) \in H_{n-1}$

$$\boxed{(P(x),\varphi_n(x)) = \int_a^b \rho(x)\,P(x)\varphi_n(x)dx = 0}$$

即 φ_n 与所有次数小于 n 的多项式正交.

性质3：设 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式，且首项系数均为1，

$$\boxed{\varphi_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n\varphi_{n-1}(x),\quad n = 0,1,\cdots}$$

首项系数为1的正交多项式都满足

其中

$$\varphi_{-1}(x) = 0,\quad \varphi_0(x) = 1,\quad \alpha_n = \frac{(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))}{(\varphi_n(x),\varphi_n(x))},\quad \beta_n = \frac{(\varphi_n(x),\varphi_n(x))}{(\varphi_{n-1}(x),\varphi_{n-1}(x))}$$

性质4：设 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的**正交多项式**，则 $\varphi_n(x)$ 在 (a,b) 内 n 个不同零点.

证明：若 $\varphi_n(x)$ 在 (a,b) 内的零点都是**偶重**，则 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 不变号，但

$$\left(\varphi_n(x), \varphi_0(x)\right) = \int_a^b \rho(x)\,\varphi_n(x)\varphi_0(x)dx = 0$$（矛盾！）

设$a < x_1 < \cdots < x_l < b$为$\varphi_n(x)$在$(a,b)$内的**奇重零点**，令$q(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_l)$，则 $\varphi_n(x)q(x)$ 不变号，因

$$\left(\varphi_n(x), q(x)\right) = \int_a^b \rho(x)\,\varphi_n(x)q(x)dx \neq 0$$(若$l < n$ 则与正交性矛盾！)

故 $l = n$.

2.1 Legendre（勒让德）多项式

在 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式称为**勒让德多项式**，记为：

$$P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=1,2,\cdots$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k$$

$P_n(x)$ 首项 x^n 系数为：$\dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

令 $\tilde{P}_n(x)=\dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$，则 $\tilde{P}_n(x)$ 是首项系数为 1 的勒让德多项式

思考：如何证明

（1）正交性：

$$(P_n, P_m) = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

（2）奇偶性：

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

故： $P_{2n}(x)$ 只含偶次幂， $P_{2n+1}(x)$ 只含奇次幂

（3）递推式：

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots$$
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

（4）$P_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个不同零点

① $P_n(x)$ 零点都在 $(-1,1)$ 内

② $P_n(x) = 0$ 的根都是实根

思考：

1. 如何证明

2. 如何编程计算 P_n

提示：$\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_k(x)dx = a_k \int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

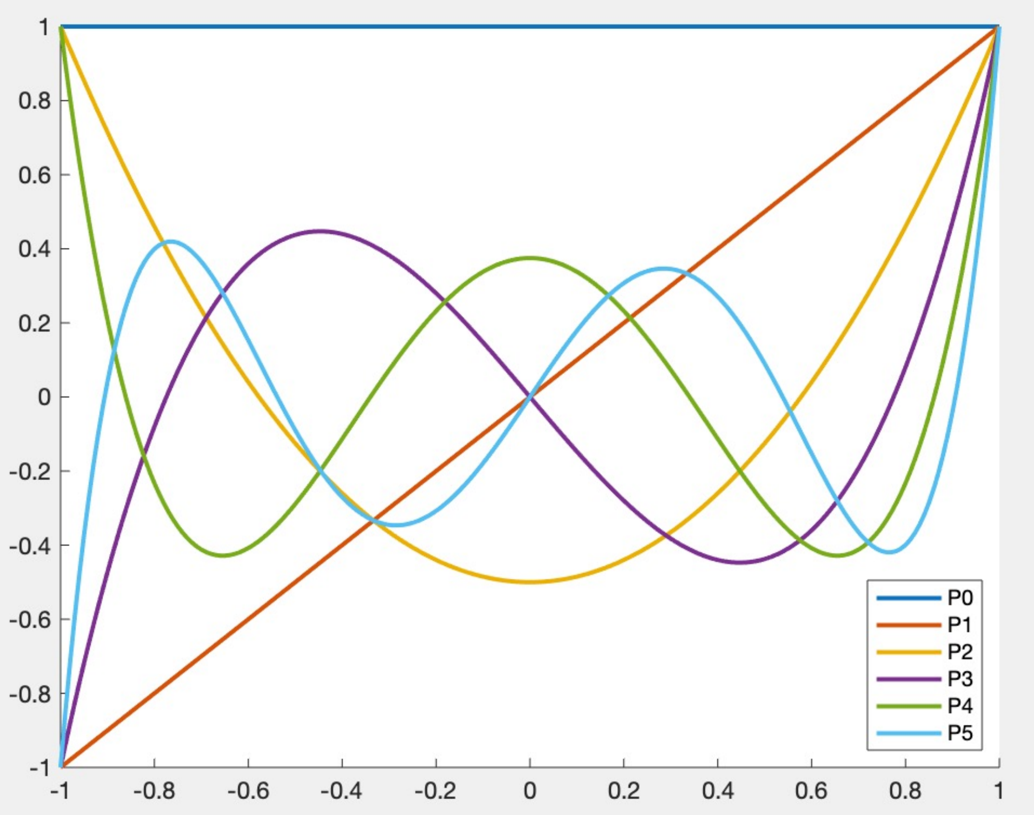
$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$$

$$P_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}, \quad \dots\dots$$

Legendre.m

```
P0=1, P1=x
P2=(3*x^2)/2 - 1/2
P3=(x*(5*x^2 - 3))/2
P4=(35*x^4)/8 - (15*x^2)/4 + 3/8
P5=(x*(63*x^4 - 70*x^2 + 15))/8
```



2.2 Chebyshev（切比雪夫）多项式

在$[-1,1]$上带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式称为**切比雪夫多项式**，记为：

$$\boxed{T_n(x)=\cos(n\arccos x)\,,\quad n=1,2,\cdots}$$

$T_n(x)$ 首项 x^n 系数为：2^{n-1}，且 $|T_n(x)|\le 1$

令 $\boxed{\tilde{T}_n(x)=\dfrac{T_n}{2^{n-1}}}$，则 $\tilde{T}_n(x)$ 是首项系数为 1 的切比雪夫多项式

思考：如何证明

（1）正交性：

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

（2）奇偶性：

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

故： $T_{2n}(x)$ 只含偶次幂， $T_{2n+1}(x)$ 只含奇次幂

（3）递推式：

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\quad n = 1, 2, \cdots$$
$$T_0(x) = 1,\quad T_1(x) = x$$

（4）$T_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内 n 有个不同零点 $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$

① $T_n(x)$ 零点都在 $(-1,1)$ 内

② $T_n(x) = 0$ 的根都是实根

思考：

1. 如何证明

2. 如何编程计算 T_n

（5） $T_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内 $n+1$ 有个不同极值点 $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

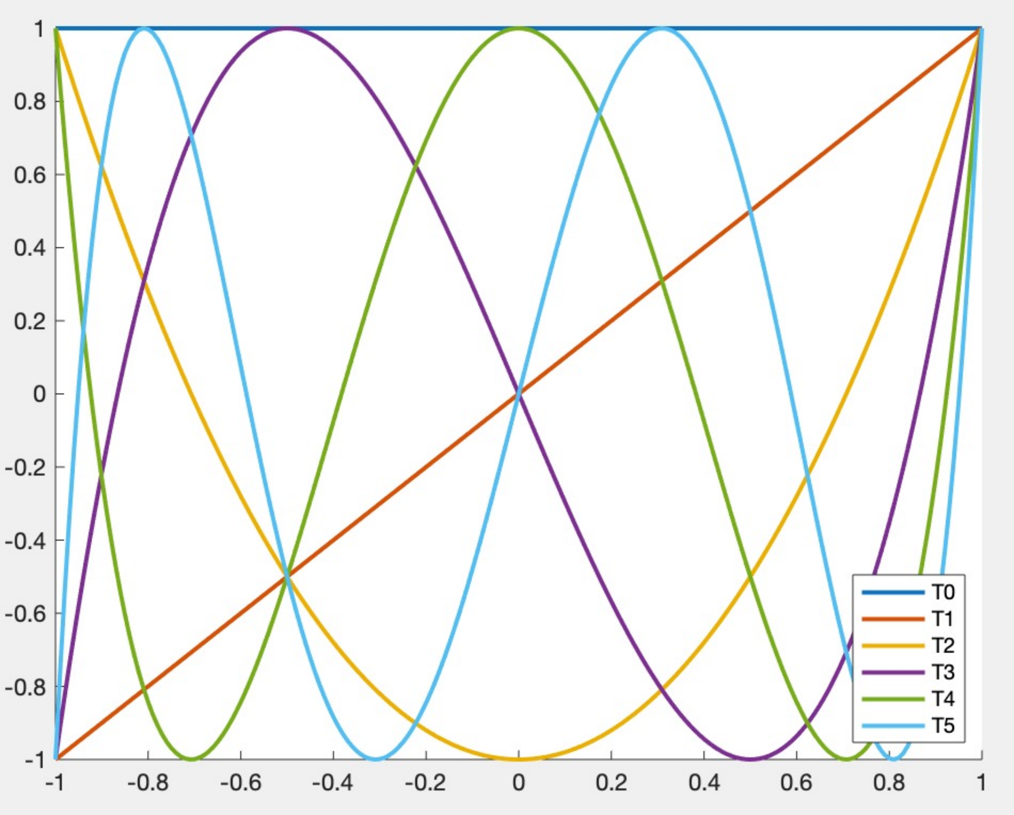
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$\dots\dots$$

Chebyshev.m

```
T0=1, T1=x
T2=2*x^2 - 1
T3=x*(4*x^2 - 3)
T4=8*x^4 - 8*x^2 + 1
T5=x*(16*x^4 - 20*x^2 + 5)
```



2.3 首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式

定理：记 $\widetilde{H}_n$ 为全部首项系数为 1 的 n 次多项式集，则

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \le \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|，\ \forall P(x) \in \widetilde{H}_n$$

等价描述：

$$\|\tilde{T}_n(x)\|_\infty \le \|P(x)\|_\infty，\ \forall P(x) \in \widetilde{H}_n$$

即 $\tilde{T}_n(x)$ 在 $\widetilde{H}_n$ 中无穷范数最小：$\tilde{T}_n(x) = \min\limits_{P(x)\in \widetilde{H}_n} \|P(x)\|_\infty$

注记：设 $P_n(x) \in H_n$且首项系数 $a_n \neq 0$，

则 $P_n(x)$ 在$[-1,1]$ 上的 $n-1$ 次**最佳一致逼近多项式**：$P_n(x) - a_n\tilde{T}_n(x)$

例2 求 $f(x)=2x^3+x^2+2x-1$ 在 $[-1,1]$ 上的二次最佳一致逼近多项式.

解： 设 $P(x)$ 是 $f(x)$ 在$[-1,1]$ 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式，则

$$P(x)=f(x)-a_3\tilde{T}_3(x)$$

$$=2x^3+x^2+2x-1-2\left(x^3-\frac{3}{4}x\right)$$

$$=x^2+\frac{7}{2}x-1$$

思考：如何计算 n 次多项式 $[a,b]$ 上的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式

2.4 Chebyshev 多项式零点插值

插值多项式的**余项（误差）**：

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

所以

$$\|R_n\|_\infty \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_{n+1}(x)\|_\infty$$

定理：设 $f(x) \in C^{n+1}[-1,1]$，若插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 T_{n+1} 的 $n+1$ 个零点，则

$$\|f(x) - L_n\|_\infty = \|R_n\|_\infty \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_{n+1}(x)\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}$$

注记：Chebyshev多项式零点插值，总体插值误差最小！

若 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，则其 Chebyshev 零点插值：

（1）变量替换：$x = \dfrac{b-a}{2}t + \dfrac{b+a}{2}$

（2）插值节点：$x_k = \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{2k+1}{2(n+1)}\pi + \dfrac{b+a}{2}$，$k = 0\ 1, 2, \cdots, n$

插值整体误差：

$$\|R_n\|_\infty \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}$$

例3 求 $f(x)=e^x$ 在 $[0,1]$ 上的四次 Chebyshev 插值多项式并估计误差.

解： 插值节点为 $x_k=\frac{1}{2}\cos\frac{2k+1}{2(4+1)}\pi+\frac{1}{2}$， $k=0,1,\cdots,4$

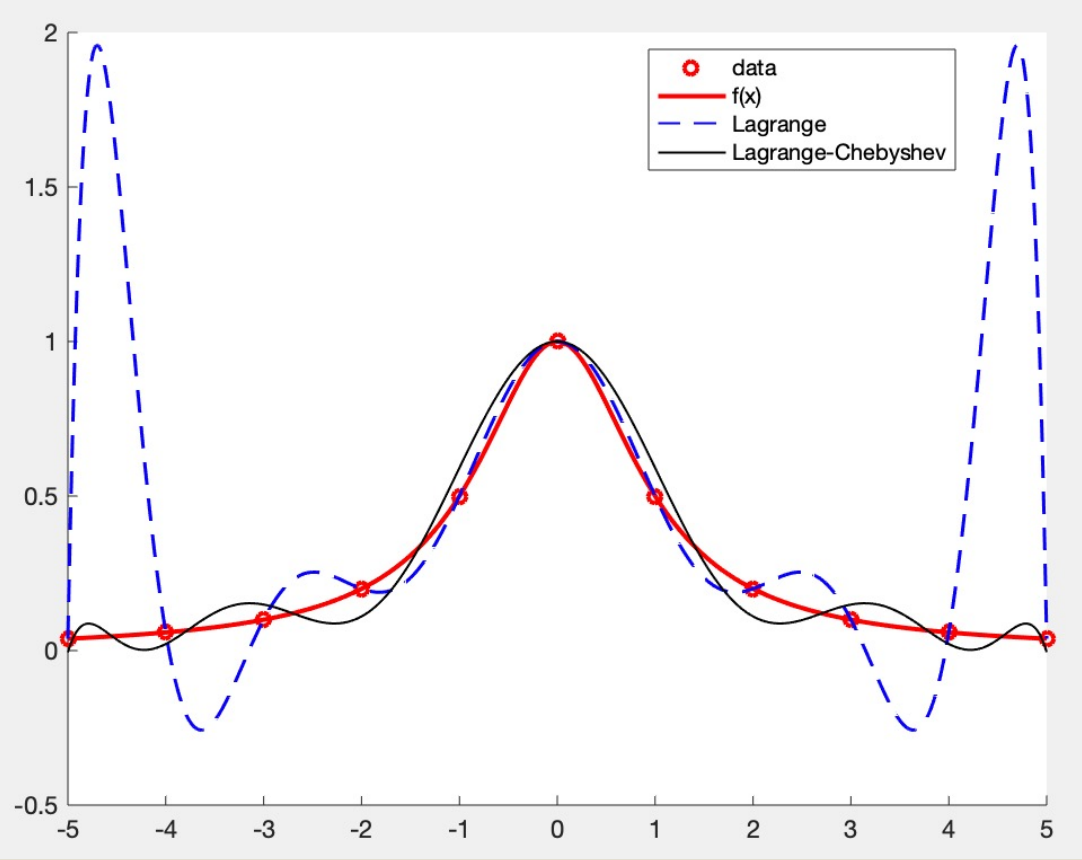
$$L_4(x)\approx 0.06849x^4+0.1418x^3+0.5090x^2+0.9989x+1.0$$

误差： $$\max_{x\in[0,1]}|f(x)-L_4(x)|\le\frac{1}{2^4(4+1)!}\cdot\frac{1}{2^{4+1}}\cdot\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(5)}(x)\right|$$

$$=\frac{1}{2^9\cdot 5!}\max_{x\in[0,1]}|e^x|\approx 4.4\times 10^{-5}$$

例4 求 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，插值区间$[-5,5]$，分别用等距节点和 Chebyshev零点作10次插值多项式，并作图比较.

Ch3_ex4.m



2.5 第二类 Chebyshev 多项式

在$[-1,1]$上带权 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式，记为：

$$U_n(x)=\frac{\sin\big((n+1)\arccos x\big)}{\sqrt{1-x^2}}，\quad n=0,1,2,\dots$$

正交性：$(U_n,U_m)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}T_n(x)\,T_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\end{cases}$

递推：$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$

$U_0=1$，$U_1=2x$

2.6 Laguerre（拉盖尔）多项式

在$[0,+\infty]$上带权 $\rho(x)=e^{-x}$ 的正交多项式，记为：

$$L_n(x)=e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^ne^{-x}),\quad n=0,1,2,\dots$$

正交性：$(L_n,L_m)=\int_0^{+\infty}e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ (n!)^2, & m=n\end{cases}$

递推：$L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$

$$L_0=1,\quad L_1=1-x$$

2.7 Hermite（埃尔米特）多项式

在$[-\infty,+\infty]$上带权 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 的正交多项式，记为：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2}\right)，\ n=0,1,2,\ldots$$

正交性：$(H_n,H_m)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, H_n(x)\, H_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{x}, & m=n\end{cases}$

递推：$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$

$H_0=1，\ H_1=2x$

小结

正交多项式及其性质

Legendre 多项式

Chebyshev多项式

正交性
奇偶性
递推式
零点

零点与最佳一致逼近

习题与编程题见课程网页：

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] 魏彤辉等，基于降维算法和Chebyshev多项式的结构区间分析[J]，华中科技大学学报，2021(49) 14-19.