第二章　插值法

——引言与基函数插值

刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、问题引入

问题：500 m，700 m，1600 m

水温多少？

423 m，7.12°C

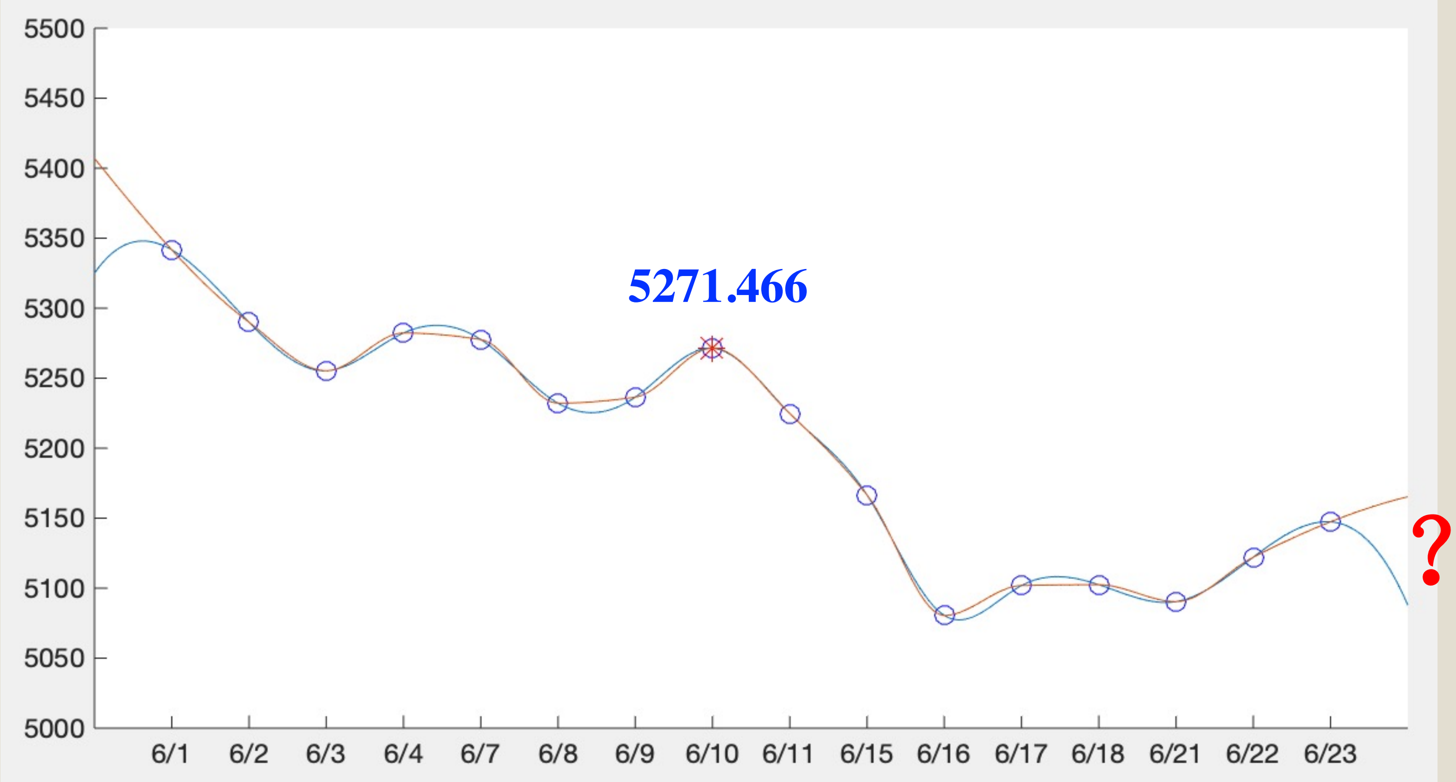
943m，3.41°C

1457m，2.53°C

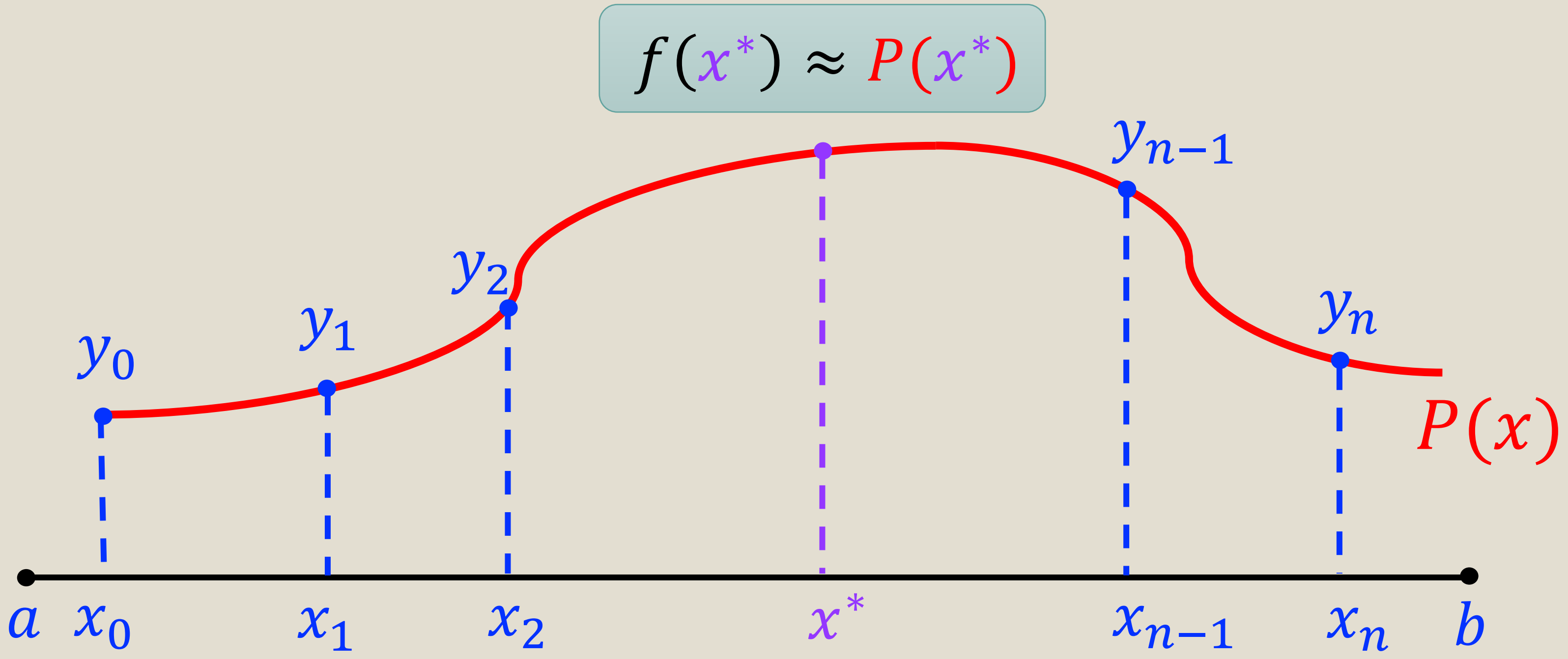
1781m，2.03°C

日期	沪深300收盘价
2021-06-01	5341.6798
2021-06-02	5289.9736
2021-06-03	5255.2855
2021-06-04	5282.2772
2021-06-07	5277.6271
2021-06-08	5232.1165
2021-06-09	5236.4493
2021-06-10	?
2021-06-11	5224.7030
2021-06-15	5166.5597
2021-06-16	5080.4909
2021-06-17	5101.8924
2021-06-18	5102.4657
2021-06-21	5090.3854
2021-06-22	5122.1583
2021-06-23	5147.3938

问题：“?”是多少？还会涨吗？



二、问题剖析



x_i：插值节点

$[a,b]$：插值区间

$P(x_i) = y_i$：插值条件

注记：插值节点可任意排列，但互不相同！

2.1 插值定义

设 $y = f(x)$ 定义于 $[a, b]$，并测得点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的值

$y_0, y_1, \cdots, y_n$，若有<u>简单易算</u> $P(x)$ 使

$$\boxed{P(x_i) = y_i,\quad i = 0,1,\cdots,n}$$

则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**，求 $P(x)$ 称为**插值法**.

2.1　插值函数分类

1、**多项式插值**：$P(x)$ 是多项式，多项式最常用的插值函数.

2、**分段多项式插值**： $P(x)$ 是分段多项式

3、三角插值：$P(x)$ 是三角函数

4、有理插值：$P(x)$ 是有理函数

…… ……

三、多项式插值

已知 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个点 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 处的值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，若存在次数不超过 n 的多项式：

$$\boxed{P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}$$

使 $P(x_i)=y_i\ (i=0,1,\cdots,n)$，则称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**插值多项式**.

定理（存在唯一性） 满足上述条件的多项式 $P(x)$ **存在且唯一**.

思考：如何证明？（提示：Vandermonde 行列式不为0）

线性插值

已知两点信息 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$，求插值多项式 $P(x)$.

解：点斜式：

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

两点式：

$$P(x) = y_0 \boxed{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}} + y_1 \boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}$$

$\boldsymbol{l_0(x) + l_1(x) = 1}$

$\boldsymbol{l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0}$

$\boldsymbol{l_0(x)}$

$\boldsymbol{l_1(x)}$

$\boldsymbol{l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1}$

$\boldsymbol{l_i(x)}$ 一次多项式

抛物线插值

已知三点信息 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$，求插值多项式 $P(x)$.

猜想：

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x),$$

其中

$$l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0, l_0(x_2) = 0 \longrightarrow l_0(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \qquad l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1, l_1(x_2) = 0 \longrightarrow l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$l_2(x_0) = 0, l_2(x_1) = 0, l_2(x_2) = 1 \longrightarrow l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

四、基函数插值法

记 $H_n(x)=\{$次数不超过 n 的多项式全体$\}$，$H_n(x)$ 是 $n+1$ 维线性空间.

设 $z_0(x), z_1(x), \cdots, z_n(x)$ 是 $H_n(x)$ 的一组基，则插值多项式可表示为

$$P(x)=a_0z_0(x)+a_1z_1(x)+\cdots+a_nz_n(x)$$

通过基函数构造插值函数的方法为**基函数插值法**.

思考：1. 基函数 $z_i(x)$ 如何选取；2. 系数 a_i 如何确定？

如：<u>**存在唯一性定理**</u>选取基：$\boldsymbol{1, x, x^2, \cdots, x^n}$，$a_i$ 通过**求解线性方程组**得到

4.1 Lagrange 插值法

定义： 设 $l_k(x)$ 是 n 次多项式，且在 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上满足

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \quad (i, k = 0,1,2,\cdots,n)$$

称 $l_k(x)$ 为节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的 n 次 **Lagrange 插值基函数**.

由 Lagrange 插值基函数构成插值多项式的方法称为 **Lagrange 插值法**.

注记： 1. $l_k(x)$ 构成 $H_n(x)$ 一组基. 为什么？

2. $l_k(x)$ 由插值节点唯一确定.

Lagrange 插值基函数

由定义可知：

$$l_k(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

由 $l_k(x_k)=1$ 可得：

$$A_k = \frac{1}{(x_k-x_0)(x-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

所以

$$\boxed{l_k(x) = \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}}$$

Lagrange 插值多项式

思考：优缺点？

由Lagrange插值基函数，可得插值多项式：

$$P(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \cdots + a_n l_n(x),$$

将插值条件 $P(x_i) = y_i \ (i = 0,1,\cdots,n)$ 代入可得，$a_i = y_i$，则定义

$$L_n(x) := y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

为 **Lagrange 插值多项式**.

注记：$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$

若引入

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

那么

$$\omega'_{n+1}(x_k) = (x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)$$

则 **Lagrange 插值多项式**可写为：

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}}$$

注记：$n+1$ 个节点的插值多项式的次数可能**小于** n！

例1 已知函数 $\ln x$ 的信息如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

用Lagrange插值法（ $n=1,2$）计算 $\ln 0.54$ 的近似值.

解：(1) 一次多项式：取 $x_0=0.5, x_1=0.6$，那么

$$\ln 0.54 \approx L_1(0.54) \approx -0.6202$$

(2) 二次多项式：取 $x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6$，那么

$$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) \approx -0.6153$$

思考：1. 如何编程？

2. 误差多大？

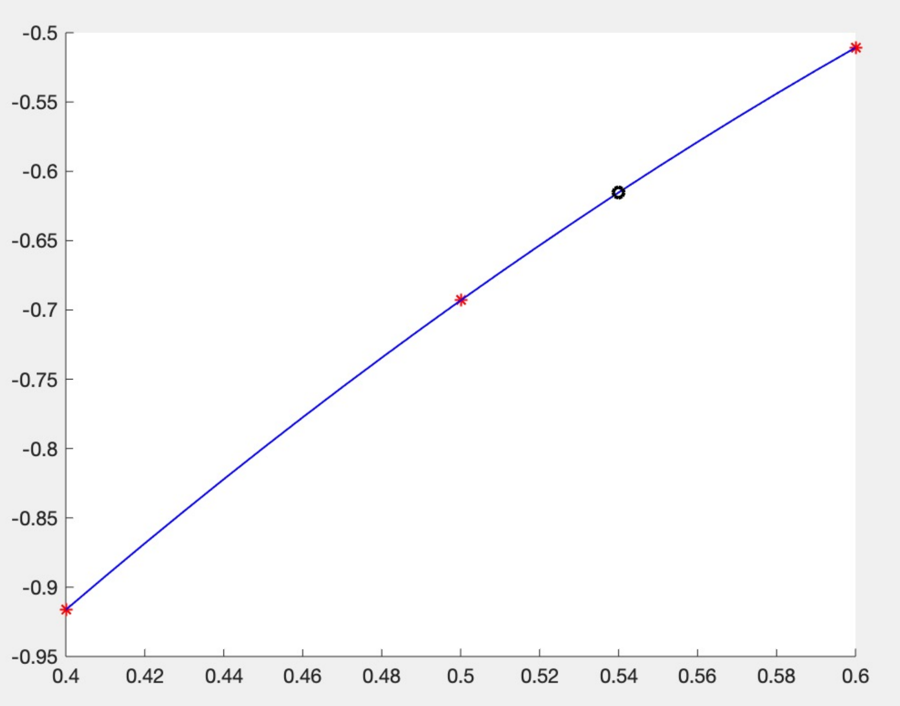
（ $\ln 0.54 = -0.616186\cdots$ ）

3. 次数越高越准确？

Lagrange.m

```matlab
clc,clear

%% 数据 (data)
x0 = [0.4, 0.5, 0.6];
y0 = [-0.9163, -0.6931, -0.5108];

% x0 = [0.4, 0.5, 0.6, 0.7 0.8];
% y0 = [-0.9163, -0.6931, -0.5108, -0.3567 -0.2231];

%% 构造Lagrange函数 (Get Lagrange polynomial)
syms x

omega_vec = x*ones(size(x0)) - x0;

omega = prod(omega_vec);

omega_der = diff(omega);

Ln_vec = y0.*(omega./(x-x0))./subs(omega_der,x0);

Ln = sum(Ln_vec);

%% 计算节点近似值 (compute Ln(x^*))

fprintf('\n Ln=%s \n\n 节点0.54处的近似值为: %f\n\n',simplify(Ln),subs(Ln,0.54));


%% 画图 (plot figure)
hold on;
plot(x0,y0,'r*','Linewidth',1);
plot(0.4:0.01:0.6,subs(Ln,0.4:0.01:0.6),'b','Linewidth',1);
```

```
Ln=(1629*x)/400 - (409*x^2)/200 - 22181/10000

节点0.54处的近似值为: -0.615272
```



误差估计

若 $[a,b]$ 上 $f(x) \approx L_n(x)$，则**截断误差**为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

也称为**插值余项**.

定理 设 $f(x) \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，则**插值余项**满足：

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \forall\, x \in [a,b],\ \xi_x \in (a,b)}$$

其中 ξ_x 依赖于 x， $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

证明：由插值条件知：$R_n(x_i)=0, i=0,1,2\cdots,n.$ 可设：

$$R_n(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)$$

对 $\forall x\in[a,b](x\neq x_i)$，构造辅助函数：

$$\varphi(t)\coloneqq R_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)\omega_{n+1}(t),$$

$$\boxed{\varphi(t)\text{ 在 }[a,b]\text{ 有 }n+2\text{ 个互不相同的零点：}x,x_0,x_1,\cdots,x_n}$$

由罗尔定理得： $\varphi'(t)$ 在 (a,b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点

$\varphi''(t)$ 在 (a,b) 内至少有 n 个不同的零点

$\cdots$

$\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a,b) 内至少有 1 个零点： $\exists\,\xi_x\in(a,b)$，使 $\varphi^{(n+1)}(\xi_x)=0.$

因为

$$\varphi^{(n+1)}(t) = R_n^{(n+1)}(t) - K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)$$

$$= f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - K(x)(n+1)!$$

$$= f^{(n+1)}(t) - K(x)(n+1)!$$

所以

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}，\text{则 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x).$$

注记：1. 插值余项公式要求：

$$f(x) \in C^n[a,b]$$

2. ξ_x 难确定，可求插值余项的误差限：

若 $M_{n+1} = \max\limits_{a<x<b} |f^{(n+1)}(x)|$，则$|R_n(x)| \leq \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod\limits_{i=0}^{n} |x - x_i|$

例2 例1用Lagrange插值法（$n=1,2$）计算 $\ln 0.54$ 时的误差.

解： 由于 $\left|f^{(n)}(x)\right| = |(-1)^n x^{-n}| = x^{-n}$,

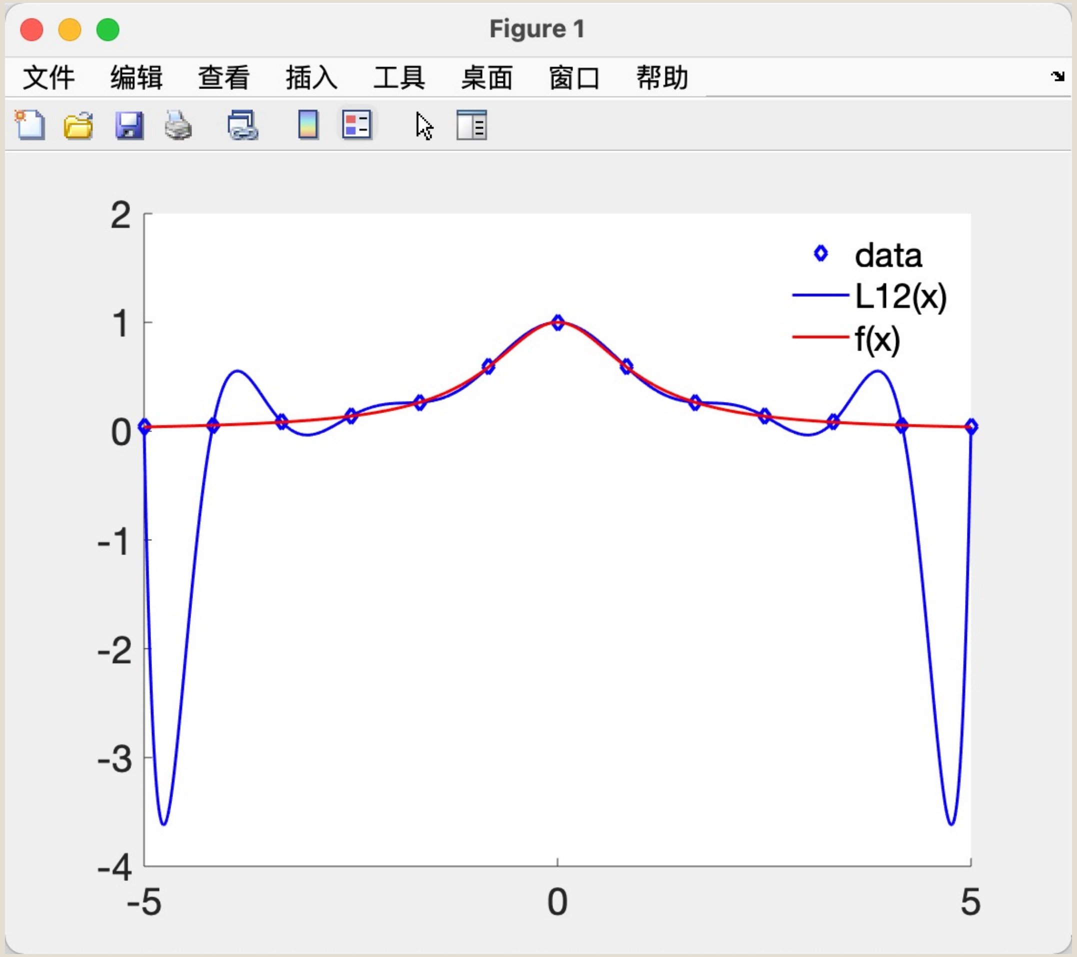
(1) 一次多项式：取 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$，那么

$$|R_1(0.54)| \le \frac{\max\limits_{0.5<x<0.6} x^{-2}}{2!}|(0.54-0.5)(0.54-0.6)| \le 0.048$$

(2) 二次多项式：取 $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.6$，那么

$$|R_1(0.54)| \le \frac{\max\limits_{0.4<x<0.6} x^{-3}}{3!}|(0.54-0.4)(0.54-0.5)(0.54-0.6)| \le 0.000875$$

例3 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，在插值区间 [□5,5] 取等距节点，画 $L_n(x)$的图像.



例4 已知 $f(x) \in C^2[a,b]$，$M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$，证明：

$$\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right| \le \frac{1}{8}M_2(b-a)^2.$$

证明：$L_1(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 是 $f(x)$ 在 $x=a,b$ 两点处的**Lagrange插值多项式**，

$$\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right| = \max_{x\in[a,b]}|f(x)-L_1(x)|$$

$$\le \frac{M_2}{2}\max_{x\in[a,b]}|(x-a)(x-b)| \le \frac{1}{8}M_2(b-a)^2.$$

Lagrange 插值基函数的性质

性质一：n 次插值多项式对次数小于等于 n 的多项式函数是精确成立的：

$$L_n(x) = f(x), \qquad 若 f(x) \in H_n(x).$$

性质二：设 $f(x) = x^m, m \le n$，则

$$R_n(x) = x^m - \sum_{k=0}^{n} x_k^m \, l_k(x) = 0，所以 x^m = \sum_{k=0}^{n} x_k^m \, l_k(x)$$

特别的，当 $m = 0$ 时，

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1}$$

例5 设 $l_k(x)$ 是插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_5$ 下的Lagrange插值基函数，证明：

$$\sum_{k=0}^{5}(x_k - x)^2 l_k(x) = 0.$$

证明： 由于

$$\sum_{k=0}^{5}(x_k - x)^2 l_k(x) = \sum_{k=0}^{5} x_k^2 l_k(x) - 2x\sum_{k=0}^{5} x_k l_k(x) + x^2\sum_{k=0}^{5} l_k(x)$$

$$= x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$$

思考：若增加一个节点时，Lagrange 插值多项式怎么变？

每个 $l_k(x)$ 均需重新计算，计算量巨大，怎么办？

4.2 Newton 插值法

目标：设计可逐次生成插值多项式的方法，即

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + a_{n+1}u_{n+1}(x),$$

其中 $P_{n+1}(x)$ 和 $P_n(x)$ 分别是 $n+1$ 次和 n 次插值多项式.

考虑：当 $n=1$ 时，已知 $P_1(x_0) = y_0$, $P_1(x_1) = y_1$，则有

点斜式：$$P_1(x) = y_0 + \boxed{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}(x - x_0)$$

将 $P_1(x)$ 看成零次插值 $P_0(x) = y_0$ 的修正，即 $P_1(x) = P_0(x) + \boxed{a_1}(x - x_0)$.

当 $n=2$ 时，已知 $P_2(x_0)=y_0$，$P_2(x_1)=y_1$，$P_2(x_2)=y_2$，构造

$$P_2(x)=P_1(x)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

则只需满足 $P_2(x_2)=y_2$ 即可，由此可得

$$a_2=\frac{P_2(x_2)-P_1(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

可见 $P_2(x)=P_0(x)+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)$.

猜想：$P_n(x)=P_{n-1}(x)+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

$$=a_0\cdot 1+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

设插值节点为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，**Newton插值法**采用的**基函数**为：

$$\omega_0(x) = 1$$

$$\omega_1(x) = x - x_0$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\cdots$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

并称 $\boxed{N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k(x)}$ 为**Newton**插值多项式，其中 a_n 为差商（均差）.

优势：增加一个插值节点时，**Newton插值多项式**仅增加一项：

$$N_n(x) = N_{n-1}(x) + a_n \omega_n(x)$$

差商的定义

函数 $f(x)$ 关于点 x_i, x_j 的一阶差商：$f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

函数 $f(x)$ 关于点 x_i, x_j, x_k 的二阶差商：$f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$

函数 $f(x)$ 关于点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的k阶差商：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

差商的基本性质

思考：如何证明？

性质一：差商可表示为函数值的线性组合，

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

可见，差商具有对称性，即差商与节点排序无关

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_{j_0},x_{j_1},\cdots,x_{j_k}],$$ $j_0,j_1,\cdots,j_k$ 是 $0,1,\cdots,k$ 的一个任意排列

性质二：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 k 阶导数，

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},\qquad \exists\,\xi\in(a,b)$$

差商表

注记：$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 即为 a_k

表2−8

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Newton 插值公式

由差商定义可知

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

……

$$f(x) = \boxed{\begin{aligned}&f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\end{aligned}} \quad N_n(x)$$

$$\boxed{+ f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)} \quad R_n(x)$$

Newton 插值 VS Lagrange 插值

思考：优劣对比

由于 $f(x)$ 关于 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的 n 次插值多项式存在且唯一！所以

$N_n(x) = L_n(x)$，且余项相同，即

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \quad \xi_x \in (a, b)$$

那么

$$\boxed{f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \xi_x \in (a, b)}$$

性质二得证！

思考：如何编程实现？

例6 已知函数 $\ln x$ 的信息如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

用Newton插值法计算 $\ln 0.54$ 的近似值.

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶
0.5	-0.6931		
0.6	-0.5108	1.8230	
0.4	-0.9163	2.0275	-2.0450

解：取 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6,\ x_2 = 0.4$，差商表如图

$$N_1(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5),$$

$$N_2(x) = -0.6931 + 1.8230(x-0.5) - 2.0450(x-0.5)(x-0.6),$$

$$N_1(0.54) = -0.6202,\ N_2(0.54) = -0.6152$$

```matlab
clc,clear

%% 初始化
A = zeros(3,4);
A(:,1) = [0.5,0.6,0.4];
A(:,2) = [-0.6931,-0.5108,-0.9163];

%% 计算差商
for m = 3:size(A,2)

    A(m-1:end,m) = diff( A(m-2:end,m-1) )./diff( A(1:m-2:end,1) );

end

%% 牛顿插值多项式
syms x
%% 牛顿插值多项式：无for循环
B = [ 1; x - A(1:end-1,1) ];
C = B * ones( size(B') );
D = triu(ones(size(C)),0);
E = D.*C + tril(ones(size(C)),-1);
N = prod(E) * diag(A(:,2:end));

%% 输出
fprintf('\t x \tf(x) \t一阶差商    二阶差商\n')
disp(A);
fprintf('N(x)=%s\n',vpa(simplify(N)));
fprintf('N(0.54)=%s\n',vpa(subs(N,0.54)));
```

for 循环？

Ch2_ex6.m

```
         x        f(x)      一阶差商    二阶差商
    0.5000   -0.6931          0          0
    0.6000   -0.5108     1.8230          0
    0.4000   -0.9163     2.0275    -2.0450

N(x)=4.0725*x - 2.045*x^2 - 2.2181
N(0.54)=-0.615272
```

（向前）差分

实际中，常采用等距节点：

$$x_k = x_0 + kh, \qquad k = 1,2,\cdots,n.$$

定义：$f(x)$ 在 x_k 处步长为 h 的一阶（向前）差分为：

$$\boxed{\Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k)}$$

类似的，二阶（向前）差分：$\Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$，……

n 阶（向前）差分：$\Delta^n f_k = \Delta(\Delta^{n-1} f_k) = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$

定义不变算子 $\mathbf{I}$ 和位移算子 $\mathbf{E}$：$\mathbf{I}f_k = f_k$，$\mathbf{E}f_k = f_{k+1}$，那么

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k = \mathbf{E}f_k - \mathbf{I}f_k = (\mathbf{E} - \mathbf{I})f_k$$

$$\Delta^n f_k = (\mathbf{E} - \mathbf{I})^n f_k = \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \mathbf{E}^{n-i}\right] f_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} f_{n+k-i}$$

反之，

$$f_{n+k} = \mathbf{E}^n f_k = (\mathbf{I} + \Delta)^n f_k = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i\right] f_k = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} \Delta^i f_k$$

差分、差商与导数

$$\Delta^m f_k = m!\,h^m f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}]$$
$$= m!\,h^m \frac{f^{(m)}(\xi_x)}{m!}$$
$$= h^m f^{(m)}(\xi_x),\ \ \xi_x \in (x_k, x_{k+m})$$

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{1}{2}\frac{\Delta^2 f_k}{h^2}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] - f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k} = \frac{1}{3!}\frac{\Delta^3 f_k}{h^3}$$

推论：$f[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}] = \dfrac{1}{m!}\dfrac{\Delta^m f_k}{h^m}$

差分表

f_k	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	$\cdots$
f_0					
	Δf_0				
f_1		$\Delta^2 f_0$			
	Δf_1		$\Delta^3 f_0$		
f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$	
	Δf_2		$\Delta^3 f_1$		$\vdots$
f_3		$\Delta^2 f_2$		$\vdots$	
	Δf_3		$\vdots$		
f_4		$\vdots$			
	$\vdots$				
$\vdots$					

差分形式的 Newton 插值

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k!\, h^k}$$

$$\omega_k = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) = t(t-1)\cdots(t-k+1)h^k \quad (x = x_0 + th)$$

$$N_n(x) = N_n(x_0+th) = a_0\omega_0(x) + a_1\omega_1(x) + \cdots + a_n\omega_n(x)$$

$$= f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} t(t-1)\cdots(t-n)h^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x_n)$$

例7 已知 $\cos x$ 在等距节点0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5处的函数值，用4次Newton插值公式计算 $\cos(0.048)$ 的近似值并估计误差.

思考：如何编程实现？(Ch2_ex7.m)

解:

表 2-3　差分表

x_k	$f(x_k)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0.00	1.00000					
		−0.00500				
0.10	0.99500		−0.00993			
		−0.01493		0.00013		
0.20	0.98007		−0.00980		0.00012	
		−0.02473		0.00025		−0.00002
0.30	0.95534		−0.00955		0.00010	
		−0.03428		0.00035		
0.40	0.92106		−0.00920			
		−0.4348				
0.50	0.87758					

$$x = 0.048, \qquad t = \frac{x - x_0}{h} = 0.48$$

$$\cos 0.048 \approx N_4(0.048) = 0.9984$$

$$|R_4(0.048)| \le \frac{h^5 \max\limits_{x\in[0,0.5]} \sin x}{5!} |t(t-1)\cdots(t-4)|$$

$$\le 1.3433\times 10^{-7}$$

知识拓展——差分

一阶向前差分为：$\Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k)$，$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$

一阶向后差分为：$\nabla f_k = f(x_k) - f(x_k - h)$，$\nabla^n f_k = \nabla^{n-1} f_k - \nabla^{n-1} f_{k-1}$

一阶中心差分为：$\delta f_k = f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_k - \frac{h}{2}\right)$，$\delta^n f_k = \delta^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}} - \delta^{n-1} f_{k-\frac{1}{2}}$

应用：有限差分方法 $\Longrightarrow$ 微分方程数值求解

小结

多项式插值

系数 y_k，基函数 $l_k(x)$

Lagrange插值

系数 a_k，基函数 $\omega_k(x)$

Newton插值

插值余项

习题与编程题见课程网页：

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] 王康等，基于二阶牛顿插值的图像自适应缩放设计及实现[J]，计算机应用与软件，2020(37): 132-140.