第四章

1.给定求积节点$x_0=\frac{1}{4},x_1=\frac{3}{4}$，试推出计算积分$\int_0^1 f(x)dx$的插值型求积公式，并写出它的截断误差。

答案：

$$A_0=\int_0^1 l_0(x)dx=\int_0^1 \frac{x-\frac{3}{4}}{x_0-x_1}dx=\int_0^1 -\frac{1}{2}(4x-3)dx=\frac{1}{2}$$

$$A_1=\int_0^1 l_0(x)dx=\int_0^1 \frac{x-\frac{1}{4}}{x_1-x_0}dx=\int_0^1 -\frac{1}{2}(4x-1)dx=\frac{1}{2}$$

故求积公式为

$$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)]$$

若$f''(x)$在[0,1]上存在，则该求积公式的截断误差为

$$R(f)=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=\int_0^1 \frac{1}{2}f''(\xi)\left(\mathrm{x}-\frac{1}{4}\right)\left(\mathrm{x}-\frac{3}{4}\right)dx,$$

其中$\xi\in(0,1)$并依赖于x.

2.确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明相应的代数精度

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h),$$

$$\int_0^h f(x)\,dx\approx\frac{h}{2}\big(f(0)+f(h)\big)+ah^2(f'(0)-f'(h))$$

答案：

（1）

将$f(x)=1,x,x^2$分别代入公式得到

$$A_{-1}+A_0+A_1=2h$$
$$-hA_{-1}+hA_1=0$$
$$h^2A_{-1}+h^2A_1=\frac{2}{3}h^3$$

解得

$$A_{-1}=A_1=\frac{h}{3},A_0=\frac{4h}{3},$$

所求公式至少具有 2 次代数精度，又因为

$$\int_{-h}^{h} x^3\,dx = \frac{h}{3}(-h)^3 + \frac{h}{3}h^3,$$

$$\int_{-h}^{h} x^4\,dx \neq \frac{h}{3}(-h)^4 + \frac{h}{3}h^4,$$

所以

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}f(-h) + \frac{4h}{3}f(0) + \frac{h}{3}f(h)$$

具有 3 次代数精度

（2）

将$f(x) = 1, x, x^2$分别代入公式得到

$$\int_0^h 1\,dx = \frac{h}{2}(1+1) + 0, \int_0^h x\,dx = \frac{h}{2}(1+h) + ah^2(1-1),$$

$$\int_0^h x^2\,dx = \frac{h}{2}(1+h^2) + ah^2(2\times 0 - 2h),$$

解得

$$a = \frac{1}{12}$$

所求公式至少具有 2 次代数精度，又因为

$$\int_0^h x^3\,dx = \frac{h}{2}(0+h^3) + \frac{h^2}{12}(0-3h^2),$$

$$\int_0^h x^4\,dx \neq \frac{h}{2}(0+h^4) + \frac{h^2}{12}(0-4h^3),$$

所以

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\big(f(0)+f(h)\big) + \frac{1}{12}h^2(f'(0) - f'(h))$$

具有 3 次代数精度

3.确定数值微分公式的截断误差表达式

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)]$$

答案：

对于上述$f(x)$，记$x_i = x_0 + ih, i = 0,1,2$其二次插值多项式为

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_0)}f(x_2)$$

所以

$$f(x)=P_2(x)+\frac{f'''(\xi)}{3\,!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=P_2(x)+\frac{f'''(\xi)}{3!}\omega_3(x),\xi\in(x_0,x_2)$$

求导得

$$f'(x)=P_2'(x)+\frac{f'''(\xi)}{3!}\omega_3'(x)+\frac{df'''(\xi)}{3!\,dx}\omega_3(x)$$

代入$x=x_0$，

$$f'(x_0)=P_2'(x_0)+\frac{f'''(\xi)}{3!}\omega_3'(x_0)$$
$$=\frac{1}{2h}[4f(x_0+h)-3f(x_0)-f(x_0+2h)]+\frac{f'''(\xi)}{3!}h^2$$

得到其截断误差为

$$\frac{f'''(\xi)}{3!}h^2,\quad \xi\in(x_0,x_0+2h)$$

4.试构造高斯型求积公式

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

答案：

将$f(x)=1,x,x^2,x^3$分别代入公式得到

$$A_0+A_1=2$$
$$A_0x_0+A_1x_1=\frac{2}{3}$$
$$A_0{x_0}^2+A_1{x_1}^2=\frac{2}{5}$$
$$A_0{x_0}^3+A_1{x_1}^3=\frac{2}{7}$$

解得

$$x_0=\frac{1}{7}\left(3-2\sqrt{\frac{6}{5}}\right),x_0=\frac{1}{7}\left(3+2\sqrt{\frac{6}{5}}\right),$$

$$A_0 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}, A_1 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}},$$

解得求积公式为

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \approx \left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}\right) f\left(\frac{1}{7}\left(3 - 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)\right) + (1 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}) f\left(\frac{1}{7}\left(3 + 2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)\right)$$