

数值分析五六章题目

题目

1. 用 LU 分解法求解线性方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$

2. 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + 0.99x_2 = 1 \\ 0.99x_1 + 0.98x_2 = 1 \end{cases}.$

a. 计算系数矩阵 A 的条件数 $\text{cond}(A)_1$.

b. 求解该线性方程组.

c. 取 $x^{(1)} = (1, 0)^T, x^{(2)} = (100.5, -99.5)^T$, 分别计算残量 $\|r_i\|_1, (i = 1, 2)$ (其中 $r_i = b - Ax^{(i)}$). 思考本题的计算结果说明了什么?

3. 给定线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 \\ s & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

其中 r, s, t 为常数. 设有求解上述方程组的迭代公式

$$Bx^{(k+1)} + Cx^{(k)} = b, k = 0, 1, \dots$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \\ s & t & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

问 r, s, t 满足什么条件时该迭代格式收敛?

4. 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$, 证明当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 矩阵正定, 且只有当 $|a| < \frac{1}{2}$ 时, *Jacobi* 迭代解 $Ax = b$ 才收敛.

5. 设矩阵 A 对称正定, 证明 *Gauss - Seidel* 迭代法收敛.

答案

1. 对系数矩阵 A 进行 LU 分解

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

解方程组 $Ly = b$, 得 $y = (3, -5, 6)^T$.

解方程组 $Ux = y$, 得 $x = (2, -2, 1)^T$.

2. a. 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}$, 求得 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -9800 & 9900 \\ 9900 & -10000 \end{pmatrix}$.

从而, $\text{cond}(A)_1 = 39601$.

b. $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \end{pmatrix}$.

c. 计算得, $r_1 = (0, 0.01)^T, r_2 = (-0.995, -0.985)^T$.

于是 $\|r_1\|_1 = 0.01, \|r_2\|_1 = 1.98$.

这说明, 系数矩阵的条件数很大时, 残量大小不能反映近似解精度的高低。

3. 题设迭代格式的迭代矩阵为

$$A = -B^{-1}C = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \\ s & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ s-r & t & 0 \\ -s & -t & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda - r)(\lambda - t) \Rightarrow \rho(A) = \max\{|r|, |t|\}$$

于是, 迭代收敛 $\iff \rho(A) < 1 \iff |r| < 1, |t| < 1$.

$$4. A \text{ 为正定} \iff \begin{cases} 1 > 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} > 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} > 0 \end{cases}$$

解得, $\frac{1}{2} < a < 1$, 此时解方程组的 *Gauss-Seidel* 迭代方法收敛。

Jacobi 方法的迭代矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

解得, $\rho(B) = 2|a|$, 由收敛充要条件, *Jacobi* 迭代收敛当且仅当 $|a| < \frac{1}{2}$.

5. A 对称正定, 则 $a_{ii} > 0$. 记 $A = D - L - L^T$, 其中 D 为对角阵, L 为下三角阵.

$G - S$ 迭代矩阵 $B_G = (D - L)^{-1}L^T$, 设 λ 是 B_G 的特征值, 对应的特征向量是 y , 则

$$B_G y = \lambda y \Rightarrow L^T y = \lambda(D - L)y$$

上式与 y 做内积

$$(L^T y, y) = \lambda((D - L)y, y) \Rightarrow \lambda = \frac{(L^T y, y)}{(Dy, y) - (Ly, y)}$$

记 $(Dy, y) = \sum a_{ii} y_i^2 = \sigma > 0$, 又有 $(L^T y, y) = (y, Ly) = \overline{(Ly, y)}$, 设 $-(Ly, y) = \alpha + i\beta$, 则 $(L^T y, y) = \overline{(Ly, y)} = -\alpha + i\beta$, 于是

$$\lambda = \frac{-\alpha + i\beta}{\sigma + \alpha + i\beta} \Rightarrow |\lambda|^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\sigma + \alpha)^2 + \beta^2} < 1$$

因此 $\rho(B_G) < 1$, $G - S$ 方法收敛.