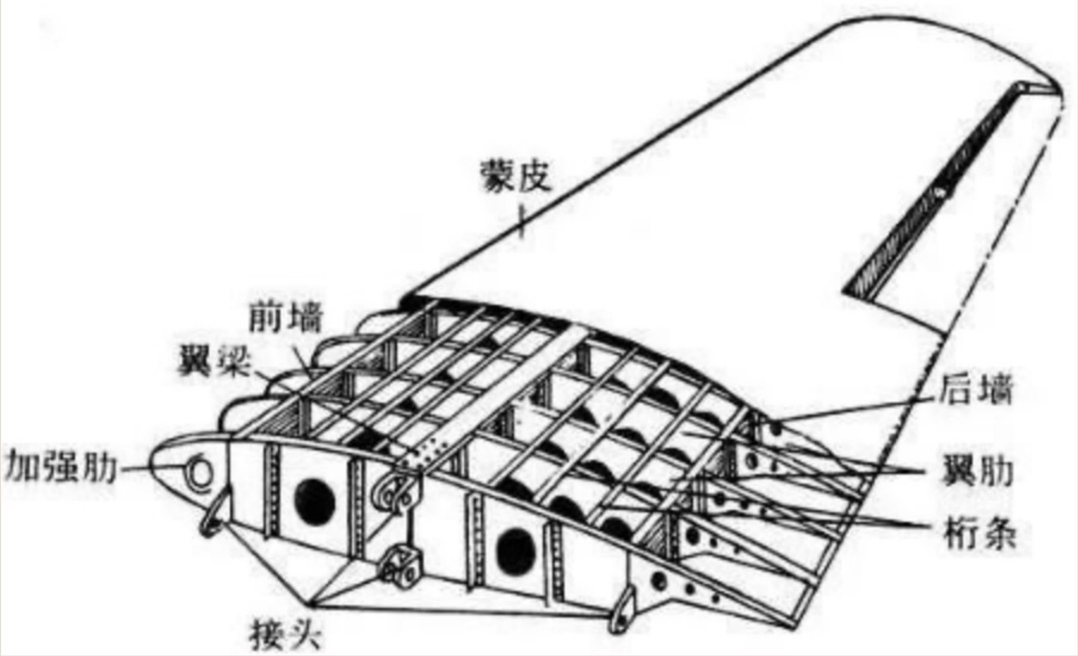
第二章　插值法

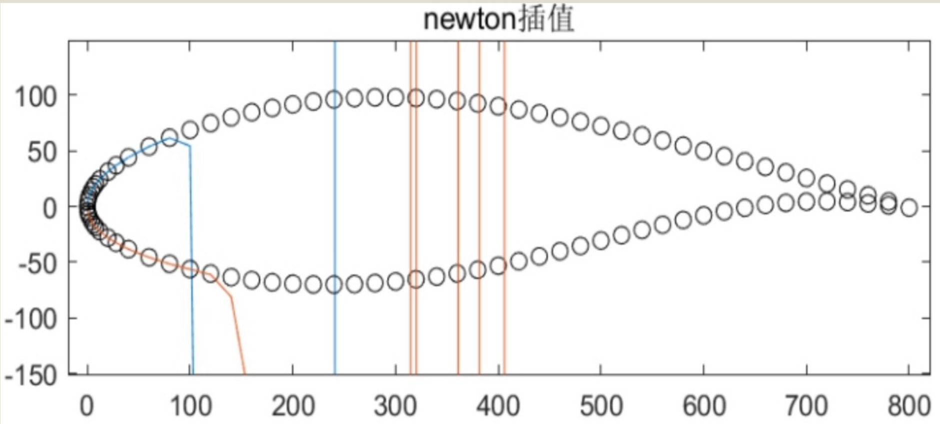
——Hermite与分段低次插值

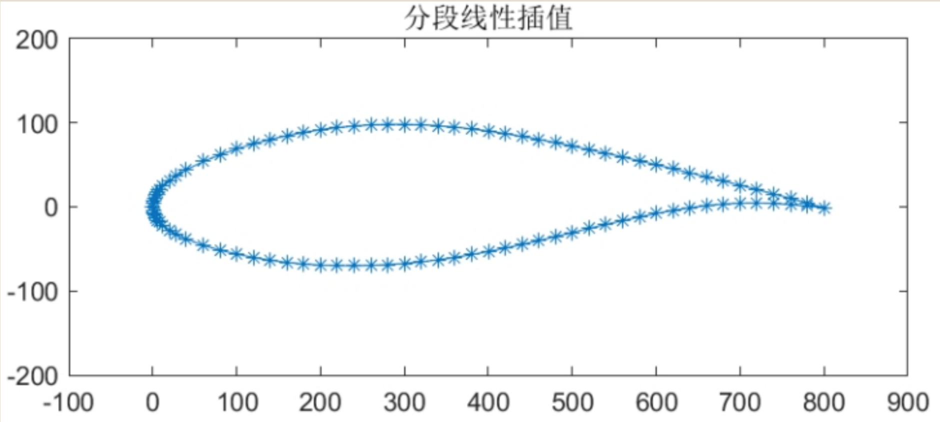
刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、问题引入







问题：Newton插值失败，分段线性插值无法保证光滑性，怎么办？

实际中(如机翼设计)，不仅要**函数值相等**：

$$P(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$$

而且要**若干阶导数也相等**：

$$P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) \quad (i = 0,1,2,\cdots,n, k = 1,2,\cdots,m)$$

满足以上条件的插值多项式 $P(x)$ 为 **Hermite 插值多项式**.

二、重节点差商与 Taylor 插值

定理：设 $f \in C^n[a,b]$， $x_0, x_1, \cdots, x_n$为 $[a,b]$ 上的相异节点，则 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 是其变量的**连续函数**.

由此可得

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

类似的，

$$f[x_0, x_0, x_0] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0}} f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2!} f''(x_0)$$

$$f[x_0, x_0, \cdots, x_0] = \lim_{x_i \to x_0} f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Taylor 插值

注记：Taylor插值即为节点x_0处的n次Hermite插值！

在Newton插值中，

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x)$$

令 $x_i \to x_0, i = 1,2,\cdots,n$，得

$$N_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n := T_n(x)$$

称 $T_n(x)$ 为 **Taylor 插值多项式**，其余项为

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi_x \in (a, b)}$$

三、两种典型的 Hermite 插值

1. 三点三次 Hermite 插值

插值节点：x_0，x_1，x_2

插值条件：① $P(x_i)=f(x_i)$，$i=0,1,2$；② $P'(x_1)=f'(x_1)$

2. 两点三次 Hermite 插值

插值节点：x_0，x_1

插值条件：对 $i=0,1$ 有 ① $P(x_i)=f(x_i)$；② $P'(x_i)=f'(x_i)$

注记：$m+1$个插值条件(函数值和导数值) $\Longrightarrow$ 次数不超过 m 次的 **Hermite 多项式**

3.1 三点三次 Hermite 插值

插值节点：x_0，x_1，x_2

插值条件：① $H(x_i) = f(x_i)$，$i = 0,1,2$； ② $H'(x_1) = f'(x_1)$

由①②可设 $H(x) := f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

$$\boxed{+ A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}$$

由②可得

$$A = \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

余项

因为 x_0，x_1，x_2 是 $R(x)$ 的零点，且 x_1 是二重零点，所以

$$R(x) := f(x) - H(x) = K(x)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)$$

与 **<u>Lagrange 插值余项</u>** 推导类似，利用罗尔定理，可得

$$\boxed{R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)}$$

其中 ξ_x 位于 x_0，x_1，x_2，x 界定范围内.

例8 已知函数 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 在节点 $\frac{1}{4},1,\frac{9}{4}$ 的函数值，以及节点 1 处的导数值，试给出三点三次Hermite插值多项式及其余项.

思考：如何编程实现？

解： 首先算出差商如右表，那么结合

$$H'(1)=f'(1)=\frac{3}{2}$$

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶
1/4	1/8		
1	1	7/6	
9/4	27/8	19/10	11/30

可得：$H(x)=-\frac{14}{225}x^3+\frac{263}{450}x^2+\frac{233}{450}x-\frac{1}{25}$

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2\left(x-\frac{9}{4}\right)=\frac{9\xi_x^{-\frac{5}{2}}}{384}\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2\left(x-\frac{9}{4}\right)，\ \xi_x\in\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4}\right)$$

3.2 两点三次 Hermite 插值

插值节点：x_0，x_1

插值条件：对 $i=0,1$ 有 ① $H(x_i)=f(x_i)=y_i$； ② $H'(x_i)=f'(x_i)=m_i$

采用基函数方法，令

$$H(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+m_0\beta_0(x)+m_1\beta_1(x)$$

其中 $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$ 均为 **3 次多项式**，且满足

$$\begin{cases}\alpha_j(x_i)=\delta_{ji}, \ \alpha_j'(x_i)=0, \\ \beta_j(x_i)=0, \ \beta_j'(x_i)=\delta_{ji}, \end{cases} \quad (i,j=0,1), \quad \delta_{ji}=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$\alpha_0(x)$：已知 $\alpha_0(x_0)=1,\ \alpha_0'(x_0)=0,\ \alpha_0(x_1)=0,\ \alpha_0'(x_1)=0$

（1）由 $\alpha_0(x_1)=0,\ \alpha_0'(x_1)=0$，可设

$$\alpha_0(x)=(ax+b)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

（2）由 $\alpha_0(x_0)=1,\ \alpha_0'(x_0)=0$，可得

$$a=\frac{2}{x_1-x_0},\qquad b=1-\frac{2x_0}{x_1-x_0}$$

所以

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

类似的，

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$H(x)=y_0\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+y_1\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+m_0(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+m_1(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

余项

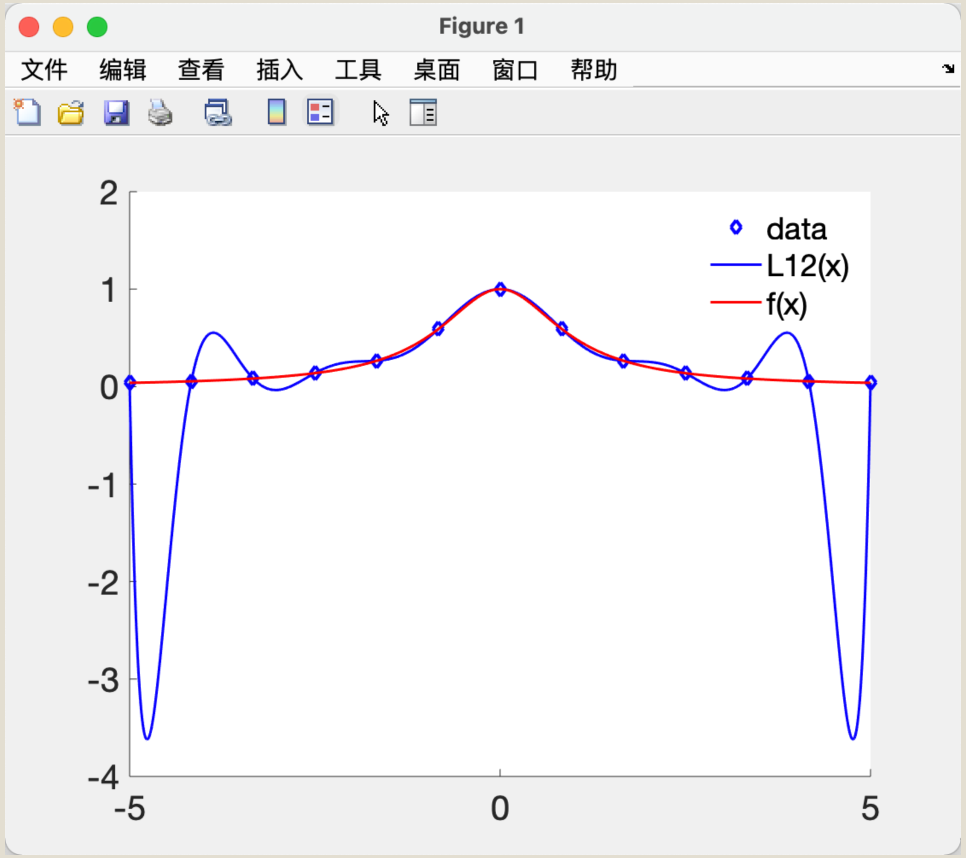
$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

其中 $\xi_x \in (\min\{x_0,x_1\}，\ \max\{x_0,x_1\})$

思考： 如何编程实现？

四、分段低次插值

已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$，在插值区间 [□5,5] 取等距节点，画 $L_n(x)$的图像.



注记：

1. $n \to +\infty$ 时，$L_n(x)$ 不一定收敛于 $f(x)$

2. 高次多项式插值**不稳定**，实际中很少使用！

Runge（龙格） 证明了，存在一个常数 $\boldsymbol{c} \approx \mathbf{3.63}$，

当 $|x| \le \boldsymbol{c}$ 时， $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n(x) = f(x)$

当 $|x| > c$ 时， $\{L_n(x)\}$ 发散

思考：如何解决该问题？

解决方法：分段低次多项式来逼近函数 $f(x)$.

常用的分段低次插值：

基本思想：分段低次多项式代替单个多项式来逼近 $f(x)$

1. 分段线性插值

——每个小区间上用线性多项式逼近 $f(x)$

2. 分段三次Hermite插值

——每个小区间上用三次Hermite多项式逼近 $f(x)$

3. 三次样条插值

——插值多项式在整个插值区间上二阶连续可导，且近似 $f(x)$

4.1 分段线性插值

已知 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 是 $[a,b]$ 上的互异节点，且 $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\cdots,n$. 记

$$h_k = x_{k+1} - x_k,\quad h = \max_k\{h_k\}$$

求分段函数 $I_h(x)$ 满足：

① $I_h(x) \in C[a,b]$

② $I_h(x_k) = y_k$， $k = 0,1,\cdots,n$

③ $I_h(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 为线性函数（一次多项式）

思想：通过 折线段逼近 $f(x)$

$I_h(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 的表达式：

$$I_h^k(x) = y_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + y_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0,1,\cdots,n-1$$

所有 $I_h^k(x)$ 合起来为 $I_h(x)$.

余项（误差估计）：所有 $[x_k, x_{k+1}]$ 中误差最大值 (Lagrange 插值余项)

$$|R(x)| = |f(x) - I_h(x)| \le n \max_{0\le k\le n-1} \left| \frac{f''(\xi_{x_k})}{2!}(x - x_k)(x - x_{k+1}) \right| \le n \frac{M_2}{8} h^2$$

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|$$

$$h = \max_{0\le k\le n-1} |x_{k+1} - x_k|$$

注记：$I_h(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$，但节点处不光滑！

4.2 分段三次 Hermite 插值

已知 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 是 $[a,b]$ 上的互异节点，且

$$y_k = f(x_k), \qquad m_k = f'(x_k), \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

求分段函数 $I_h(x)$ 满足：

① $I_h(x) \in C^1[a,b]$

② $I_h(x_k) = y_k$， $I_h'(x_k) = m_k$， $k = 0,1,\cdots,n$

③ $I_h(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 为三次多项式

思想：$[x_k, x_{k+1}]$ 采用**两点三次Hermite插值**

$I_h(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 的表达式：

$$I_h^k(x) = y_k\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + y_{k+1}\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$

$k = 0,1,\cdots,n-1$

$$+m_k(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2 + m_{k+1}(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

余项（误差估计）：所有 $[x_k, x_{k+1}]$ 中误差最大值 **(Hermite插值余项)**

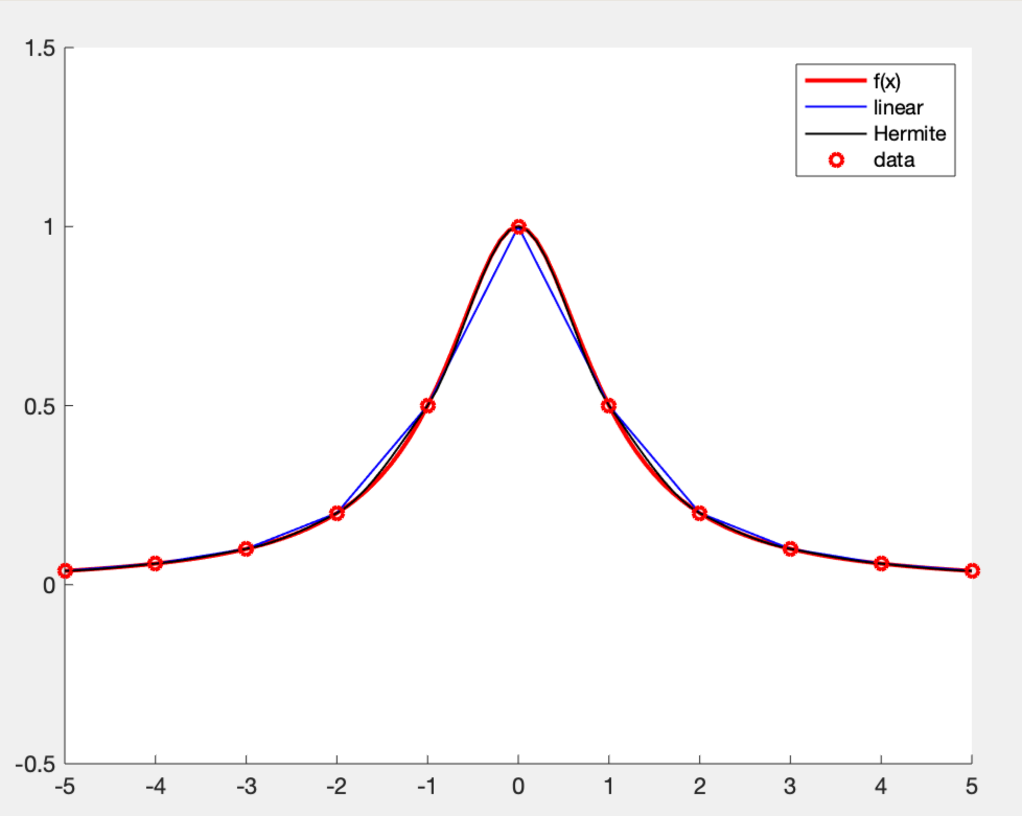
$M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

$h = \max_{0\le k\le n-1} |x_{k+1} - x_k|$

$$|R(x)| = |f(x) - I_h(x)| \le n \max_{0\le k\le n-1}\left|\frac{f^{(4)}(\xi_{x_k})}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2\right| \le n\frac{M_4}{384}h^4$$

注记：$I_h(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $f(x)$，且比线性插值快一倍！

例9 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，在 [□5,5] 取11个等距节点，画出分段线性插值和分段三次 Hermite 插值图像，并与 $f(x)$ 图像比较.



Ch2_ex9.m

4.3 三次样条插值

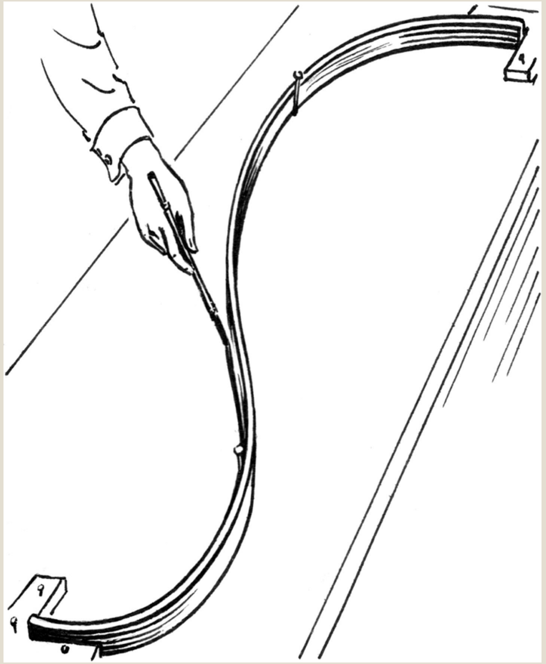
若要求插值函数有**更高的光滑性**，如：**机翼设计、跑车外形设计**等

给定 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$，且 $f(x_k) = y_k$，$k = 0,1,\cdots,n$，使得

① $S(x) \in C^2[a, b]$

② $S(x_k) = y_k$，$k = 0,1,\cdots,n$

③ $S(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 为三次多项式



样条

满足①, ③：$S(x)$ 为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的三次样条函数

满足①-③：$S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数

$S(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$ 上的分段函数 $s_k(x)$ 满足：

(1) $S(x_k) = y_k$: $s_k(x_k) = y_k$, $s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$

(2) $S(x) \in C^2[a,b]$: ${s_{k-1}}'(x_k^-) = s_k'(x_k^+)$, ${s_{k-1}}''(x_k^-) = {s_k}''(x_k^+)$, $k = 1,2,\cdots,n-1$

$s_k(x)$ 为三次多项式，有 4 个待定系数，则 $S(x)$ 有 $4n$ 个待定系数.

(1)有 $2n$ 个方程， (2)有 $2(n-1)$ 个方程，共 $4n-2$ 个方程，**但缺 2 个方程！**

端点处的边界条件！

边界条件

1. 第一类边界条件（给定端点处一阶导数值）：

$$S'(x_0^+) = f_0'，\ S'(x_n^-) = f_n'$$

2. 第二类边界条件（给定端点处二阶导数值）：

$$S''(x_0^+) = f_0''，\ S''(x_n^-) = f_n''$$

自然边界条件：

$$S''(x_0^+) = S''(x_n^-) = 0$$

3. 第三类边界条件（$f(x)$ 以 $\boldsymbol{x_n - x_0}$ 为周期）：

$$S(x_0) = S(x_n)，\ S'(x_0^+) = S'(x_n^-)，\ S''(x_0^+) = S''(x_n^-)$$

$S(x)$ 的构造

设 $S''(x_k) = M_k\ (k = 0, \cdots, n)$，因 $s_k''(x)$ 为线性函数，则

$$s_k''(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h_k} M_k + \frac{x - x_k}{h_k} M_{k+1}, \qquad h_k = x_{k+1} - x_k$$

两边积分两次，可得

$$s_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} + c_1 x + c_2$$

将条件(1)：$s_k(x_k) = y_k$，$s_k(x_{k+1}) = y_{k+1}$ 代入上式，

思考：求 M_k，M_{k+1}？

$$s_k(x) = \frac{(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} M_k + \frac{(x - x_k)^3}{6h_k} M_{k+1} + \left(y_k - \frac{M_k h_k^2}{6}\right) \frac{x_{k+1} - x}{h_k} + \left(y_{k+1} - \frac{M_{k+1} h_k^2}{6}\right) \frac{x - x_k}{h_k}$$

M_k，M_{k+1} 的计算

因为 $s_k'(x) = -\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2h_k}M_k + \frac{(x-x_k)^2}{2h_k}M_{k+1} + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{h_k}{6}(M_{k+1}-M_k)$

所以 $s_k'(x_k^+) = -\frac{h_k}{3}M_k - \frac{h_k}{6}M_{k+1} + \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}$

条件(2)：$s_{k-1}{}'(x_k^-) = s_k'(x_k^+)$

可得 $\frac{h_{k-1}}{6}M_{k-1} + \frac{h_{k-1}+h_k}{3}M_k + \frac{h_k}{6}M_{k+1} = \frac{y_{k+1}-y_k}{h_k} - \frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}$

即

$$\underbrace{\boxed{\frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}}}_{\mu_k}M_{k-1} + 2M_k + \underbrace{\boxed{\frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}}}_{\lambda_k}M_{k+1} = \underbrace{\boxed{6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]}}_{d_k}$$

因此，

思考：$s_{k-1}{}''(x_k^-) = s_k''(x_k^+)$ 没用到？

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k, \qquad k = 1,2,\cdots,n-1$$

以上 $n-1$ 个方程，结合 2 个边界条件，可求 $M_0, M_1, \cdots, M_n$

1. 第一类边界条件：

$$S'(x_0^+) = f_0', \ S'(x_n^-) = f_n', \ \text{即}\ s_0'(x_0^+) = f_0', \ s_{n-1}'(x_n^-) = f_n'$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$\lambda_0 = 1$，$d_0 = 6\left[\dfrac{(y_1 - y_0)}{h_0} - f_0{}'\right]/h_0$

$\mu_n = 1$，$d_n = 6\left[f_n' - \dfrac{(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}}\right]/h_{n-1}$

2. 第二类边界条件：

$$S''(x_0^+) = f_0'',\quad S''(x_n^-) = f_n'',\quad \text{即 } M_0 = f_0'',\quad M_n = f_n''$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

3. 第三类边界条件：

$$S'(x_0^+) = S'(x_n^-)，S''(x_0^+) = S''(x_n^-)$$

所以 $M_0 = M_n$，$\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_n \downarrow \dfrac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}$

$\mu_n \downarrow \dfrac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}$

$d_n \downarrow 6\dfrac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}}$

注记：

1. 三种情况的线性方程组的解均存在唯一（为什么？）

2. 线性方程组称为三弯矩方程

（工程中二阶导数称为弯矩）

余项（误差估计）

注记： $S^{(n)}(x)$ 一致收敛于 $f^{(n)}(x)$，$n = 0,1,2$

定理：设 $f(x) \in C^4[a,b]$，$S(x)$ 为三次样条插值函数，则有

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-S(x)| \le \frac{5}{384}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^4$$

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)-S'(x)| \le \frac{1}{24}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^3$$

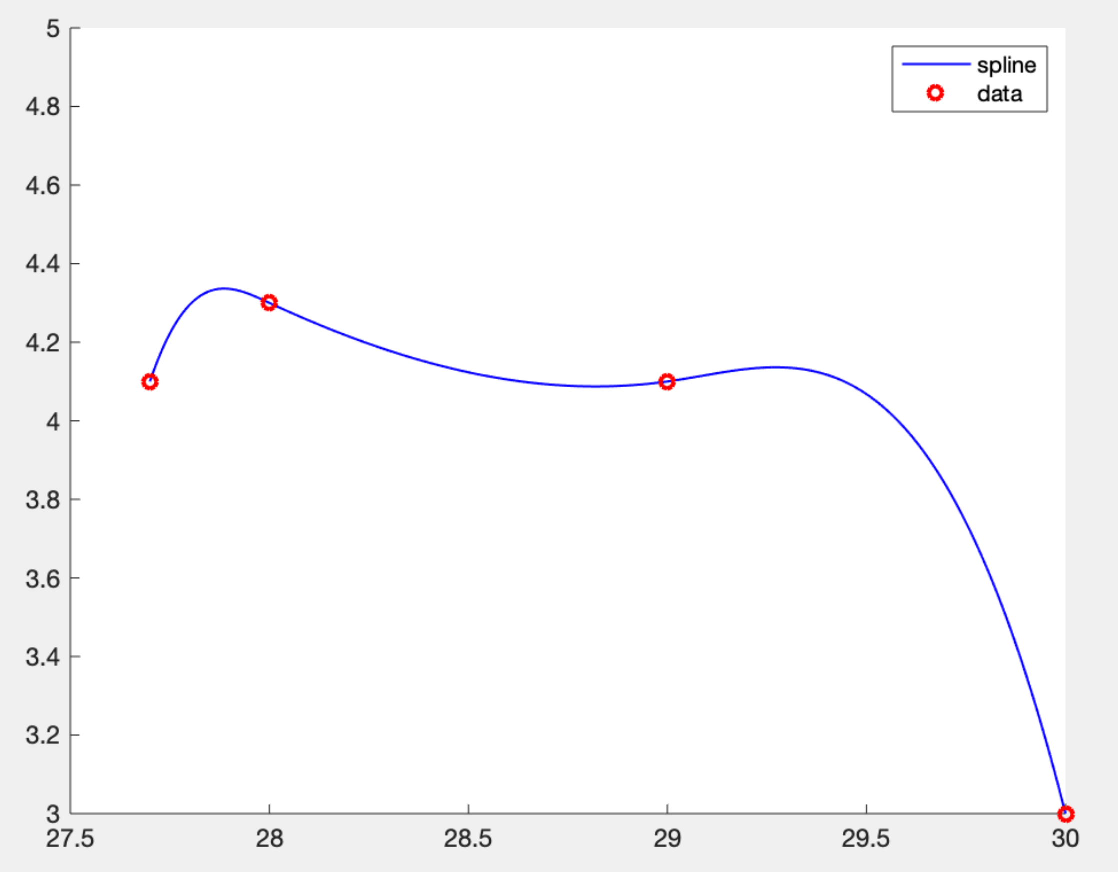
$$\max_{a\le x\le b}|f''(x)-S''(x)| \le \frac{3}{8}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|h^2$$

其中 $h = \max\limits_{k=0,1,\cdots,n-1}|x_{k+1}-x_k|$.

例10 $f(x)$ 定义在 $[27.7,30]$ 上，其插值节点与函数值如下，试求三次样条多项式 $S(x)$ 逼近 $f(x)$，并且 $S'(27.7)=3.0$, $S'(30)=-4.0$.

x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

Ch2_ex10.m



小结

光滑多项式插值

Hermite 插值

分段低次插值

Taylor、三点三次、两点三次

分段线性、分段三次Hermite、三次样条

插值余项

习题与资料见Canvas课程网页

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] 严敬等，可控进口叶片角的圆柱形叶片设计[J]，热能动力工程，2020(35): 23-29.