

第二讲 数量金融的预备知识

卞世博 副教授



上海财经大学 统计与管理学院

第二讲 数量金融的预备知识

- 第一节 无套利定价
- 第二节 收益率与波动率
- 第三节 随机微分

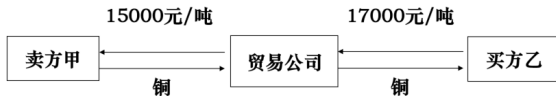
§1 无套利定价

- ① 无套利定价原理
- ② 确定状态下无套利定价原理的应用
- ③ 不确定状态下无套利定价原理的应用

§1 无套利定价

1.1 无套利定价原理

● 商品贸易中的套利



§1 无套利定价

1.1 无套利定价原理

- 在商品贸易中套利中的困难

- ① 信息成本（寻找合适的买家比较困难、商品的品质和等级不统一）
- ② 空间成本（商品的运输、存储成本高）
- ③ 时间成本（利息费用，存储期间价格下降的风险）

1.1 无套利定价原理

金融市场中套利更加便利

- 专业化交易市场的存在
 - 信息成本只剩下交易费用
 - 产品标准化
- 金融产品的无形化
 - 没有空间成本
- 金融市场存在的卖空机制大大增加了套利机会
- 金融产品在时间和空间上的多样性也使得套利更为便捷

1.1 无套利定价原理

套利的定义

- 套利
 - 指一个能产生无风险盈利的交易策略
 - 这种套利是指纯粹的无风险套利
- 在实际的套利中，纯粹的无风险套利很少，大部分情况是一种风险套利（统计套利），但相对于其盈利来说风险较小。

1.1 无套利定价原理

“无套利定价”原理

- 金融市场上的套利非常方便和快捷，使得套利机会一旦出现，马上会导致投资者竞相套利，套利机会很快消失，无套利均衡重新建立。因此，无套利均衡可以被用于金融资产的定价。
- “无套利定价”原理
 - 金融产品在市场合理价格是这个价格使得市场不存在套利机会
- 那什么是套利机会呢？

1.1 无套利定价原理

套利机会的等价条件

- 1 存在两个不同的资产组合，它们的未来损益（payoff）相同，但它们的成本却不同；
 - 损益：现金流
 - 不确定状态下现金流——每一种状态对应的现金流
- 2 存在两个相同成本的资产组合，但是第一个组合在所有的可能状态下的损益都不低于第二个组合，而且至少存在一种状态，在此状态下第一个组合的损益要大于第二个组合的支付。
- 3 一个组合其构建的成本为零，但在所有可能状态下，这个组合的损益都不小于零，而且至少存在一种状态，在此状态下这个组合的损益要大于零。

1.1 无套利定价原理

无套利均衡的三个等价性推论

- 同损益同价格
 - 如果两种证券具有相同的损益，则这两种证券具有相同的价格。

1.1 无套利定价原理

无套利均衡的三个等价性推论

- 静态组合复制定价
 - 如果一个资产组合的损益等同于一个证券，那么这个资产组合的价格等于证券的价格。这个资产组合称为证券的“复制组合”（replicating portfolio）。

§1 无套利定价

无套利均衡的三个等价性推论

- 动态组合复制定价
 - 如果一个自融资（**self-financing**）交易策略最后具有和一个证券相同的损益，那么这个证券的价格等于自融资交易策略的成本。这称为动态套期保值策略（**dynamic hedging strategy**）。
- 自融资交易策略：资产组合的价值变化完全取决于交易的盈亏；持有期间没有资金的流入与流出；组合中的证券调整的资金全部来源于组合自身的收益或损失。（例如投资1万元购买股票，期间不增加投资，也不取出资金）

§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

- 例1：假设两个零息票债券A和B，两者都是在1年后的同一天支付100元的面值。如果A的当前价格为98元。另外，假设不考虑交易成本。
 - （1）B的价格应该为多少呢？
 - （2）如果B的市场价格只有97.5元，问如何套利呢？

§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

- 应用同损益同价格原理
 - B的价格也为98元
 - 如果B的市场价格只有97.5 元，卖空A，买进B

§1 无套利定价

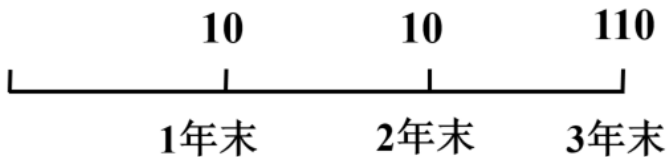
1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

- 例2：假设当前市场的零息票债券的价格为：
 - ①1年后到期的零息票债券的价格为98 元；
 - ②2年后到期的零息票债券的价格为96 元；
 - ③3年后到期的零息票债券的价格为93 元；
- （1）息票率为10%，1年支付1次利息的三年后到期的债券的价格为多少呢？
- （2）如果息票率为10%，1年支付1次利息的三年后到期的债券价格为120元，如何套利呢？

§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

- 看未来损益图



§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

● 静态组合复制策略

- ① 购买0.1张的1年后到期的零息票债券，其损益刚好为 $100 \times 0.1 = 10$ 元
- ② 购买0.1张的2年后到期的零息票债券，其损益刚好为 $100 \times 0.1 = 10$ 元
- ③ 购买1.1张的3年后到期的零息票债券，其损益刚好为 $100 \times 1.1 = 110$ 元

§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

根据无套利定价原理的推论

$$0.1 \times 98 + 0.1 \times 96 + 1.1 \times 93 = 121.7$$

市场价格为120元，低估B，则买进B，卖出静态组合

- (1) 买进1张息票率为10%，1年支付1次利息的三年后到期的债券；
- (2) 卖空0.1张的1年后到期的零息票债券；
- (3) 卖空0.1张的2年后到期的零息票债券；
- (4) 卖空1.1张的3年后到期的零息票债券。

§1 无套利定价

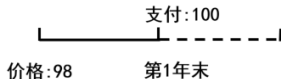
1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

- 例3：假设从现在开始1年后到期的零息票债券的价格为98元，从1年后开始，在2年后到期的零息票债券的价格也为98元（1年后的价格）。另外，假设不考虑交易成本。
 - （1）从现在开始2年后到期的零息票债券的价格为多少呢？
 - （2）如果现在开始2年后到期的零息票债券价格为99元，如何套利呢？

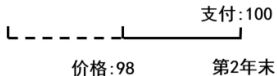
§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

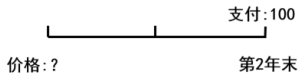
- ① 从现在开始1年后到期的债券 $Z_{0 \times 1}$



- ② 1年后开始2年后到期的债券 $Z_{1 \times 2}$



- ③ 从现在开始2年后到期的债券 $Z_{0 \times 2}$



§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

● 动态组合复制策略

- ① 先在当前购买0.98份的债券 $Z_{0 \times 1}$;
- ② 在第1年末0.98份债券 $Z_{0 \times 1}$ 到期, 获得 $0.98 \times 100 = 98$ 元;
- ③ 在第1年末再用获得的98元去购买1份债券 $Z_{1 \times 2}$

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

自融资策略的现金流表

交易策略	现金流		
	当前	第1年末	第2年末
(1) 购买0.98份 $Z_{0 \times 1}$	$-98 \times 0.98 = -96.04$	$0.98 \times 100 = 98$	
(2) 在第1年末购买1份 $Z_{1 \times 2}$		-98	100
合计:	-96.04	0	100

§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

- 这个自融资交易策略的损益：
 - 就是在第2年末获得本金100元，这等同于一个现在开始2年后到期的零息票债券的损益。
- 这个自融资交易策略的成本为：
 - $98 \times 0.98 = 96.04$

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

如果市价为99元，如何套利

● 构造的套利策略如下

- (1) 卖空1份 $Z_{0 \times 2}$ 债券，获得99 元，所承担的义务是在2 年后支付100 元；
- (2) 在获得的99元中取出96.04 元，购买0.98 份 $Z_{0 \times 1}$ ；
- (3) 购买的1年期零息票债券到期，在第一年末获得98 元；
- (4) 再在第1年末用获得的98 元购买1 份第2 年末到期的1 年期零息票债券；
- (5) 在第2年末，零息票债券到期获得100 元，用于支付步骤（1）卖空的100 元；

§1 无套利定价

1.2 确定状态下无套利定价原理的应用

交易策略	现金流		
	当前	第1年末	第2年末
(1) 卖空1份 $Z_{0 \times 2}$	99		-100
(2) 购买0.98份 $Z_{0 \times 1}$	$-0.98 \times 98 = -96.04$	$0.98 \times 100 = 98$	
(3) 在第1年末购买1份 $Z_{1 \times 2}$		-98	100
合计:	$99 - 96.04 = 2.96$	0	0

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- 不确定状态
 - 资产的未来损益不确定
 - 假设市场在未来某一时刻存在有限种状态
 - 在每一种状态下资产的未来损益已知
 - 但未来时刻到底发生哪一种状态不知道

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- 例4：假设有一风险证券A，当前的市场价格为100 元
1年后的市场出现两种可能的状态：状态1和状态2。
状态1时，A的未来损益为105元，状态2 时，95 元。
有一证券B，它在1年后的未来损益也是：状态1 时105 元，
状态2 时95 元。另外，假设不考虑交易成本。
 - （1）B的合理价格为多少呢？
 - （2）如果B的价格为99 元，如何套利？

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- (1) B的合理价格也为100 元;
- (2) 如果B为99元, 价值被低估, 则买进B, 卖空A。

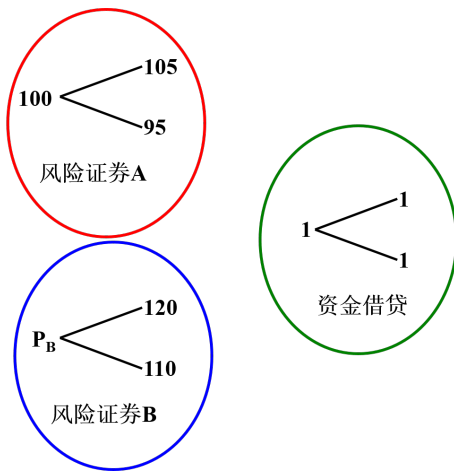
§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- 例5：假设有一风险证券A，当前的市场价格为100 元。1 年后的市场出现两种可能的状态：状态1 和状态2。状态1 时，A 的未来损益为105 元，状态2 时，95 元。有一证券B，它在1 年后的未来损益也是：状态1 时120 元，状态2 时110 元。另外假设不考虑交易成本，资金借贷也不需要成本。
 - （1）B的合理价格为多少呢？
 - （2）如果B的价格为110 元，如何套利？

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

证券未来损益图



§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- 静态组合策略

- 要求 x 份的证券A和 y 份的资金借贷构成B

$$x \begin{pmatrix} 105 \\ 95 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 110 \end{pmatrix}$$

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- 解得

- $x = 1, y = 15$

- B的价格为

- $1 \times 100 + 15 \times 1 = 115$

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- 第二个问题
 - 当B为110元时，如何构造套利组合呢？
- 套利组合
 - 买进B，卖空A，借入资金15元。

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

	期初现金流	期末时刻的现金流	
		状态一	状态二
(1) 买进B	-110	120	110
(2) 卖空A	100	-105	-95
(3) 借入资金15元	15	-15	-15
合计	5	0	0

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- 例6：假设有一风险证券A，当前的市场价格为100 元
1年后的市场出现三种可能的状态：状态1、2和3。
状态1、2和3时，A的未来损益分别为110.25，99.75，
90.25元。

有一证券B，它在1年后的未来损益也是：状态1、2 和3 时，
分别为125，112.5和109元。

另外，假设不考虑交易成本，资金借贷的年利率为5.06%，
半年利率为2.5%。

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

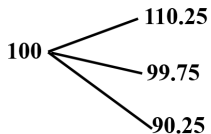
● 问题：

(1) B的合理价格为多少呢？

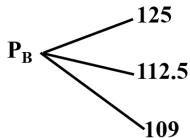
(2) 如果B的价格为110元，如何套利？

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

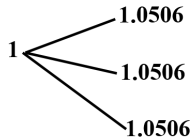
证券未来损益图



风险证券A



风险证券B



资金借贷

§1 无套利定价

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

- 构造静态组合

- x份A和y份资金借贷构成B

$$x \begin{pmatrix} 110.25 \\ 99.75 \\ 90.25 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1.0506 \\ 1.0506 \\ 1.0506 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 112.5 \\ 109 \end{pmatrix}$$

方程无解!

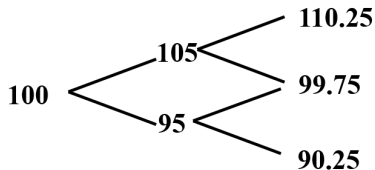
1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制

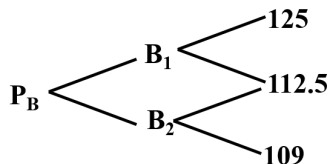
- 我们把1年的持有期拆成两个半年，这样在半年后就可调整组合
- 假设证券A在半年后的损益为两种状态，分别为105 元和95 元
- 证券B的半年后的损益不知道

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

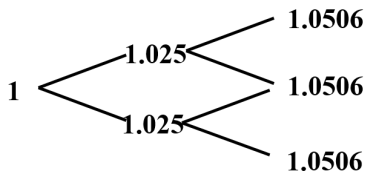
动态组合复制



风险证券A



风险证券B



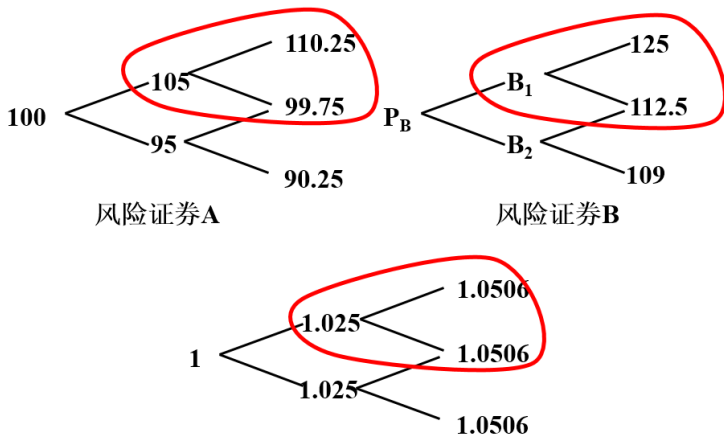
1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制

- 动态策略调整方法
 - 多期的静态复制策略
 - 从后往前应用静态复制策略

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制



1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制

- (1) 证券在中期价格为105 时

$$x \times \begin{pmatrix} 110.25 \\ 99.75 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 112.5 \end{pmatrix}$$

解得

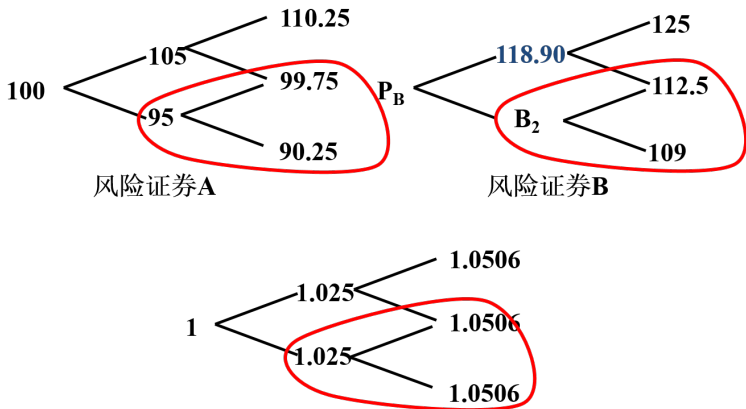
$$x = 1.19, y = -6.05$$

此时B的价格为

$$B_1 = 1.19 \times 105 - 6.05 = 118.90$$

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制



1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制

- (2) 证券在中期价格为95 时

$$x \times \begin{pmatrix} 99.75 \\ 90.25 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 109 \end{pmatrix}$$

解得

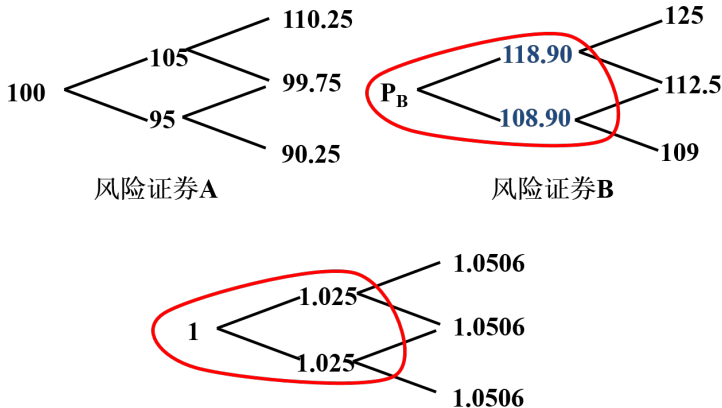
$$x = 0.368, \quad y = 73.94$$

此时B的价格为

$$B_2 = 0.368 \times 95 + 73.94 = 108.90$$

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制



1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制

$$x \times \begin{pmatrix} 105 \\ 95 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118.90 \\ 108.90 \end{pmatrix}$$

解得

$$x=1, \quad y=13.56$$

此时B的价格为

$$B = 1 \times 100 + 13.56 \times 1 = 113.56$$

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

动态组合复制

- 构造如下的组合

- 1份的证券A;
- 持有现金13.56。

$$1 \times \begin{pmatrix} 110.25 \\ 99.75 \\ 90.25 \end{pmatrix} + 13.56 \times \begin{pmatrix} 1.0506 \\ 1.0506 \\ 1.0506 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 124.5 \\ 114 \\ 104.5 \end{pmatrix}$$

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

在半年后进行组合调整

- (1) 证券A的损益为105时
 - 再买进0.19份的证券A，需要现金19.95 元 ($0.19 \times 105 = 19.95$)
 - 持有的现金13.56，加上利息变为： $13.56 \times 1.025 = 13.90$ 。
 - 半年后的组合变为：
 - 1.19份证券A
 - 现金-6.05 ($13.90 - 19.95$)

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

在半年后进行组合调整

在1年后此组合损益状态为

$$1.19 \times \begin{pmatrix} 110.25 \\ 99.75 \end{pmatrix} - 6.05 \times \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 112.5 \end{pmatrix}$$

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

在半年后进行组合调整

- (2) 证券A的损益为95时
 - 卖出0.632份的证券A，得到现金 $0.632 \times 95 = 60.04$ 元
 - 持有的现金13.56，加上利息变为： $13.56 \times 1.025 = 13.90$ 。
 - 半年后的组合变为：
 - 0.368份证券A
 - 现金73.94 ($13.90 + 60.04$)

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

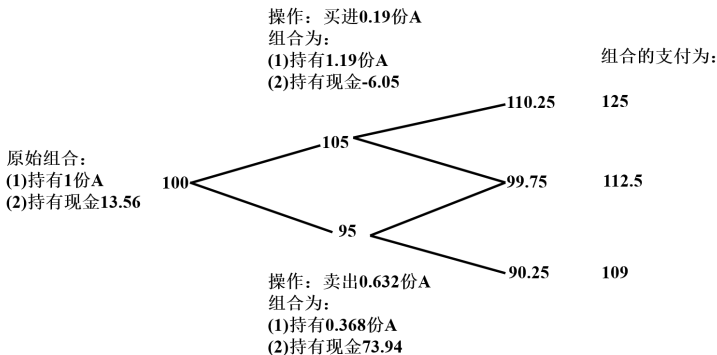
在半年后进行组合调整

在1年后此组合损益状态为

$$0.368 \times \begin{pmatrix} 99.75 \\ 90.25 \end{pmatrix} + 73.94 \times \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 109 \end{pmatrix}$$

1.3 不确定状态下的无套利定价原理的应用

复制过程图



§1 无套利定价

无套利定价原理的简单总结

- 无套利定价原理就是金融学定价的核心思想
- “同损益同价格” 实际上就是 “一价定理”
- 静态和动态组合复制策略则是用于给衍生产品定价的基本思想
- 如果市场存在摩擦（交易成本）时，只能给出一个定价区间。在这个定价区间内，市场无法实现套利。

§2 收益率与波动率

- ① 货币的时间价值
- ② 单利与复利
- ③ 波动率

§2 收益率与波动率

2.1 货币的时间价值

- 货币的时间价值是指货币以一定的利率水平，经历一定时间的投资和再投资所增加的价值。
- 例如，投资者将1元钱存在银行，银行支付8% 的年利率。1年以后，1元将增值为1.08 元。1元经过1 年时间的投资增加了0.08 元，这就是货币的时间价值。

§2 收益率与波动率

2.2 单利与复利

- 单利(simple interest)
 - 无论时间多长，只按本金计算利息，上期的利息不计入本金内重复计算利息。
- 设FV为单利终值，PV为本金，i表示年利息率，n表示年限，则单利终值为：

$$FV_n = PV(1 + i \times n)$$

§2 收益率与波动率

2.2 单利与复利

- 复利(compound interest)
 - 除本金计算利息外，要将期间所生利息一并加入本金计算利息，即所谓的“利滚利”。
- 设FV为单利终值，PV为本金，i表示年利息率，n表示年限，则复利终值为：

$$FV_n = PV(1 + i)^n$$

§2 收益率与波动率

2.2 单利与复利

- 例：投资者将本金10000元存入银行，1年的定期存款利率为2.5%，5年后本息共有多少？

- 单利计息

$$FV = 10000 \times (1 + 2.5\% \times 5) = 11250(\text{元})$$

- 复利计息

$$FV = 10000 \times (1 + 2.5\%)^5 = 11314.08(\text{元})$$

§2 收益率与波动率

2.2 单利与复利

- 连续复利(continuously compounded)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A \left(1 + \frac{r_m}{m} \right)^{mt} = Ae^{rt}$$

- 连续复利与普通复利的转换

$$r = m \ln \left(1 + \frac{r_m}{m} \right)$$

$$r_m = m \left(e^{\frac{r}{m}} - 1 \right)$$

§2 收益率与波动率

2.2 单利与复利

- 终值

- 现在的资金在未来某个时刻的价值。

$$FV_T = PV_t \times e^{r(T-t)}$$

- 现值

- 未来某个时刻的资金在现在的价值。

$$PV_T = FV_t \times e^{-r(T-t)}$$

§2 收益率与波动率

2.3 波动率

- 波动率(Volatility)

- 用来衡量标的资产收益率波动的剧烈程度。
- 由于资产收益率是一个随机过程，实际的波动率永远是一个未知数，或者说，实际波动率是无法事先精确计算的，人们只能通过各种方法得到它的估计值。

§2 收益率与波动率

2.3 波动率

- 波动率估计
 - 移动平均模型
 - GARCH模型

§2 收益率与波动率

2.3 波动率

- 移动平均模型

- 等权重

$$\sigma_t^2 = [1/(M-1)] \times \sum_{i=1}^M (r_{t-i} - \frac{\sum_{j=1}^M r_{t-j}}{M})^2$$

- 加权

$$\sigma_t^2 = [1/(M-1)] \times \sum_{i=1}^M w_{t-i} (r_{t-i} - \frac{\sum_{j=1}^M r_{t-j}}{M})^2$$

§2 收益率与波动率

2.3 波动率

- 移动平均法是以过去 M 天的收益率的样本方差作为当前时刻或者说当日波动率的估计值，分为简单移动平均和加权移动平均两种方法，前者将每天的收益率看成是等权重的，后者则对不同的时点赋予不同的权重。该方法需要确定的重要参数即天数 M ，根据经验值，对于日度数据， M 一般取5或10为佳。

§2 收益率与波动率

2.3 波动率

- GARCH模型（Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity）
 - GARCH模型假定收益的方差服从一个可预测的过程，它依赖于最新的收益，也依赖于先前的方差。

§2 收益率与波动率

2.3 波动率

- GARCH (1, 1) 是这类模型中最简单的，用公式表示有：

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

- α_0 、 α_1 和 β 均为待估的参数，可以用历史数据估计出。
- h_t 和 h_{t-1} 是本期和前期的条件方差

§3 随机微分

- 1 随机过程
- 2 马尔科夫过程
- 3 鞅过程
- 4 维纳过程
- 5 伊藤过程和伊藤引理

§3 随机微分

3.1 随机过程

- 随机过程(Stochastic Process)

- 设 E 是一随机实验，样本空间为 $\Omega = \omega$ ，参数 $T \subset (+\infty, -\infty)$ ，如果对任意 $t \in T$ ，有一定义在 Ω 上的随机变量 $X(\omega, t)$ 与之对应，则称 $\{X(\omega, t), t \in T\}$ 为随机过程，简记为 $\{X(t), t \in T\}$ 或 $\{X(t)\}$ ，也可记为 $X(t)$.

§3 随机微分

3.1 随机过程

- 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是定义在 $\Omega \times T$ 上的二元函数。
- 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 解释为一个物理系统, $X(t)$ 表示系统在时刻 t 所处的状态, $X(t)$ 的所有可能状态所构成的集合称为状态空间, 记为 I , 对于给定的 $t_0 \in T, x \in I, X(t_0) = x$ 说成是在时刻 t_0 , 系统处于状态 x 。

§3 随机微分

3.1 马尔科夫过程

- 马尔科夫过程

- 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 若对于 t 的任意 n 个值 $t_1 < t_2 < \dots < t_n, n \geq 3$, 有

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \\ = P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \end{aligned}$$

§3 随机微分

3.2 马尔科夫过程

- 马尔科夫过程是一种特殊的随机过程。马尔科夫过程可以使分析极大的简化。

- $X(t)$ 为一个马尔科夫过程，则

$$f(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) = f(X(t_1))f(X(t_2) | X(t_1))f(X(t_3) | X(t_1), X(t_2)) \cdots f(X(t_n) | X(t_1), \dots, X(t_{n-1}))$$

$$f(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) = f(X(t_1))f(X(t_2) | X(t_1))f(X(t_3) | X(t_2)) \cdots f(X(t_n) | X(t_{n-1}))$$

- 未来状态的概率分布只要知道当前状态即可，知道现在之前状态的历史并不增加任何关于未来状态的概率分布的信息。

- 鞅过程 (martingale process)

- 如果随机过程 $X(t)$ 满足对任意的 $s < t$, 都满足

$$E(X_t | X_s) = X_s$$

则称 $X(t)$ 为鞅过程。

- 直观上而言, 已知鞅过程在某一时刻的值时, 其任意之后时刻的条件期望为这一时刻的值。从赌徒的角度来看, 它是一个公平的游戏。

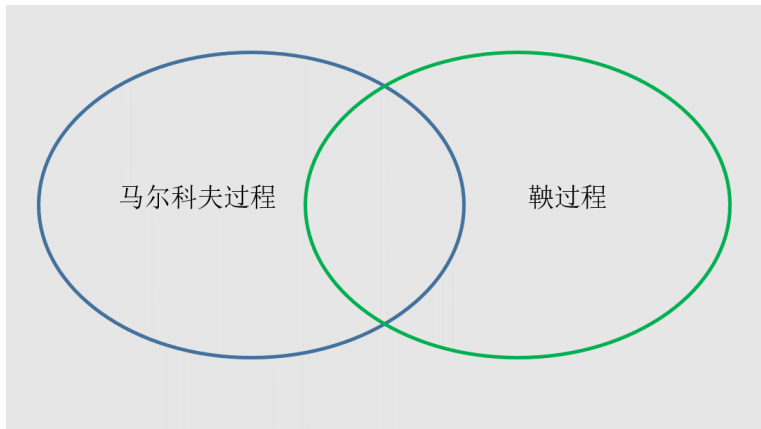
§3 随机微分

马尔科夫过程与鞅过程

- Markov过程说的是历史对于预测未来没有作用
- Martingale过程说的是这个过程没有持续的向上或者向下的趋势，也就是说这个过程在任何时刻的条件期望都是相等的。
- 二者在定义上没有任何的交集。

§3 随机微分

马尔科夫过程与鞅过程



- 维纳过程(Wiener Process)
 - 维纳过程又称布朗运动(Brownian Motion)，起源于英国植物学家布朗对水杯中的花粉粒子的运动轨迹的描述。
 - 1905年，爱因斯坦给出了物理学上解释。
 - 1918年，维纳给出了严格的数学定义。
 - 第二次华尔街革命后，用来描述资产价格的动态过程。

3.4 维纳过程

标准布朗运动

- 标准布朗运动 $W(t)$ 应满足：
 - 连续路径， $W(t)$ 关于 t 是连续的。
 - 独立增量，对于任何两个不同时间间隔 Δt ， ΔW 的值相互独立。
 - 正态增量， $\Delta W = \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$ ， $\varepsilon_i \sim N(0, 1)$ 。

3.4 维纳过程

标准布朗运动的性质

- $W(t)$ 为马尔科夫过程

$$\begin{aligned} & P\{W(t+s) \leq a \mid W(s) = x, W(u), 0 \leq u \leq s\} \\ &= P\{W(t+s) - W(s) \leq a - x \mid W(s) = x, W(u), 0 \leq u \leq s\} \\ &= P\{W(t+s) - W(s) \leq a - x\} \\ &= P\{W(t+s) \leq a \mid W(s) = x\} \end{aligned}$$

3.4 维纳过程

标准布朗运动的性质

- $W(t)$ 为鞅过程

$$\begin{aligned}E(W_t \mid W_s) &= E(W_s + (W_t - W_s) \mid W_s) \\&= E(W_s \mid W_s) + E(W_t - W_s \mid W_s) \\&= E(W_s)\end{aligned}$$

3.4 维纳过程

标准布朗运动的性质

- $W(T) - W(t) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$
- $W(T) - W(t)$ 也服从正态分布
 - 均值等于0
 - 方差等于 $T - t$
 - 标准差等于 $\sqrt{T - t}$
 - 方差可加性

3.4 维纳过程

普通布朗运动

- 遵循普通布朗运动的变量 x 是关于时间和 dW 的动态过程:

$$dX(t) = a dt + b dW(t)$$

$$X(t) = X_0 + at + bW(t)$$

- $a dt$ 为确定项, 漂移率 a 意味着每单位时间内 x 漂移 a ;
- $b dW$ 是随机项, 代表着对 x 的时间趋势过程所添加的噪音, 使变量 x 围绕着确定趋势上下随机波动, 且这种噪音是由维纳过程的 b 倍给出的, b 称为波动率。

3.4 维纳过程

普通布朗运动

- 普通布朗运动的离散形式为

$$\Delta X = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

- ΔX 具有正态分布特征，其均值为 $a\Delta t$ ，
- X 的均值为 aT ，标准差为 $b\sqrt{\Delta T}$ ，方差为 b^2T 。

§3 随机微分

3.5 伊藤过程和伊藤引理

- 伊藤过程(Ito Process)

$$dX(t) = a(X, t)dt + b(X, t)dW(t)$$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a ds + \int_0^t b dW(s)$$

- $W(t)$ 是一个标准布朗运动
- a, b 是变量 s 和 t 的函数
- 变量 X 的漂移率为 a , 方差率为 b^2

§3 随机微分

3.5 伊藤过程和伊藤引理

- 伊藤引理(Ito Lemma) 若变量 X 遵循伊藤过程, 则变量 X 和 t 的函数 $G(X, t)$ 将遵循如下过程:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial X} b dW(t)$$

其中, $W(t)$ 是一个标准布朗运动。

3.5 伊藤过程和伊藤引理

伊藤引理的简单推导

- G 的泰勒展开式为:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta X^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Delta X \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots$$

- 在常微分中, 我们得到:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t$$

- 在随机微分中, 我们得到:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta X^2$$

其中, 最后一项的阶数为 Δt

3.5 伊藤过程和伊藤引理

伊藤引理的简单推导

- 将 $\Delta X = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ 代入最后一项，并忽略比 Δt 高阶的项，则

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 \varepsilon^2 \Delta t$$

- 由于 $\varepsilon \sim N(0, 1)$ ，因此， $E(\varepsilon^2 \Delta t) = \Delta t$
- 而 $\varepsilon^2 \Delta t$ 方差和 Δt^2 同阶，可以忽略，因此有

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 \Delta t$$

3.5 伊藤过程和伊藤引理

伊藤引理的简单推导

- 取极限

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X} dX + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 dt$$

- 代入

$$dX(t) = a dt + b dW(t)$$

- 可得

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial X} b dW(t)$$

3.5 伊藤过程和伊藤引理

伊藤引理的运用

- 如果我们知道 x 遵循的伊藤过程，通过伊藤引理可以推导 $G(X, t)$ 遵循的随机过程。
- 由于衍生产品价格是标的资产价格和时间的函数，因此伊藤引理在衍生产品分析中扮演重要的角色。

3.5 伊藤过程和伊藤引理

$\ln(S)$ 所遵循的随机过程

- 假设变量 S 服从几何布朗运动

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

- 令 $G = \ln(S)$, 则

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

- 运用伊藤引理可得 $G = \ln(S)$ 所遵循的随机过程为

$$dG(t) = d\ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t)$$

3.5 伊藤过程和伊藤引理

股票价格的变化过程：几何布朗运动

- 一般假设股票价格服从几何布朗运动

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

- 则

$$d \ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t)$$

3.5 伊藤过程和伊藤引理

为何假设股票价格服从几何布朗运动

- S 不会为负。
- 股票连续复利收益率服从正态分布。
 - $T - t$ 期间年化的连续复利收益率为
 - 可知随机变量 η 服从正态分布

$$\eta \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \frac{\sigma^2}{T - t}\right]$$

- 经验事实证明，股票价格的连续复利收益率近似地服从正态分布。

3.5 伊藤过程和伊藤引理

为何假设股票价格服从几何布朗运动

- 几何布朗运动是一个马尔可夫过程，从而与弱式EMH (Efficient Markets Hypothesis) 相符。
- 也就是说，股票现在的价格已经包含了所有未来状态的概率分布的信息，研究股票价格的历史并不比当前价格增加任何新的信息。

3.5 伊藤过程和伊藤引理

市场有效理论与随机过程

- Fama(1965)提出了著名的有效市场假说。该假说认为，证券价格对新的市场信息的反应是迅速和准备的，证券价格能完全反映全部信息。
- 有效市场有三个层次
 - ① 弱式有效市场
 - ② 半强式有效市场
 - ③ 强式有效市场
- 根据众多学者的实证研究，发达国家的证券市场大体符合弱式有效市场假说。一般认为，弱式有效市场假说与马尔科夫过程是内在一致的。

3.5 伊藤过程和伊藤引理

为何假设股票价格服从几何布朗运动

- 几何布朗运动在数学上对时间处处连续，但处处不可导和二次变分（**Quadratic Variation**）不为零的性质，与股票收益率在时间上存在转折尖点等性质也是相符的。