第四讲 BS期权定价模型

卞世博 副教授

上海财经大学 统计与管理学院

- 股票价格服从的随机过程

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

- 由Ito 引理可得期权价格相应服从的随机过程

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt$$

- BS微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

- BS期权定价公式

$$c = SN\left(d_1\right) - Xe^{-r(T-t)}N\left(d_2\right)$$

- 一、模型基本假设
- 二、BS方程的推导
- 三、风险中性定价原理
- 四、BS期权定价公式的推导
- 五、BS期权定价公式的参数估计

一、假设

- 证券价格遵循几何布朗运动，即μ和σ为常数
- 允许卖空标的证券
- 没有交易费用和税收，所有证券都完全可分
- 衍生证券有效期内标的证券没有现金收益支付
- 不存在无风险套利机会
- 证券交易是连续的，价格变动也是连续的
- 衍生证券有效期内，无风险利率r为常数

- 由于假设股票价格S遵循几何布朗运动，因此

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

- 在一个小的时间间隔Δt中，S的变化值ΔS为

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W$$

- 设f是依赖于S的衍生证券的价格，则f一定是S和t的函数，根据伊藤引理可得：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dW$$

- 在一个小的时间间隔Δt中，f的变化值Δf满足：

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta W$$

- 为了消除风险源ΔW，可以构建一个包括一单位衍生证券空头和$\frac{\partial f}{\partial S}$单位标的证券多头的组合。
- 令Π代表该投资组合的价值，则：

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

- 在Δt时间后，该投资组合的价值变化$\Delta\Pi$为

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

- 代入Δf和ΔS可得

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

- 由于消除了风险，组合Π必须获得无风险收益，即

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

- 因此
$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f-\frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$
化简可得：
$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$
- 这就是著名的BS微分分程，它适用于其价格取决于标的证券价格S的所有衍生证券的定价。

- 观察BS微分方程可以发现，受制于主观的风险收益偏好的标的证券预期收益率并未包括在衍生证券的价值决定公式中。这意味着，无论风险收益偏好状态如何，都不会对f的值产生影响。
- 因此我们可以作出一个可以大大简化我们工作的假设：在对衍生证券定价时，所有投资者都是风险中性的。

三、风险中性定价原理

- 在所有投资者都是风险中性的条件下（有时我们称之为进入了一个“风险中性世界”）：
    - 所有可交易资产的百分比预期收益率都等于**无风险利率r**，因为风险中性的投资者并不需要额外的收益来吸引他们承担风险。
    - 同样，在风险中性条件下，所有现金流在求现值都应该使用无风险利率进行贴现。
- 这就是风险中性定价原理。

风险中性世界中可交易资产的随机过程

- 如果某种可交易资产的价格在现实世界中的随机过程为：

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW$$

- 则在风险中性世界中其遵循：

$$dx = r x dt + \sigma x dW$$

- 根据伊藤引理，其远期合约的价值在风险中性世界中遵循

$$df/f = r dt + \sigma x f dW$$

- 在风险中性世界中，无收益资产欧式看涨期权到期时(T时刻)的期望值为：
$$\hat{E}\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$
其中，$\hat{E}$表示风险中性条件下的期望值。
- 相应地欧式看涨期权的价格c等于
$$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

无收益资产欧式看涨期权的定价公式

- 由于在风险中性世界中

$$\ln S_T \sim N\left[\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

- 积分可得

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

其中，

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + \left(r + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + \left(r - \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$
\begin{aligned}
c &= e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[(S_T - X)^+ \,|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[(S_T - X)\,\mathbb{1}\,(S_T \geq X)\,|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[S_T\mathbb{1}\,(S_T \geq X)\,|\mathcal{F}_t\right] - e^{-r(T-t)}X\hat{E}\left[\mathbb{1}\,(S_T \geq X)\,|\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& X\hat{E}\left[\mathbb{1}\left(S_T \geq X\right)|\mathcal{F}_t\right] = X\mathbb{P}\left(S_T \geq X\,|\mathcal{F}_t\right) \\
& = X\mathbb{P}\left(S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}} \geq X\right) \\
& = X\mathbb{P}\left(\varepsilon \geq \frac{\ln\frac{X}{S_t}-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
& = X\mathbb{P}\left(\varepsilon \leq \frac{\ln\frac{S_t}{X}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) = X\Phi\left(d_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{E}\left[S_T \mathbb{1}\left(S_T \geq X\right) | F_t\right] \\
&= \hat{E}\left[S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}} \mathbb{1}\left(\varepsilon \geq -d_2\right)\right] \\
&= S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \times \int_{-d_2}^{\infty} e^{\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon \\
&= S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \times \int_{-d_2}^{\infty} e^{\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\varepsilon-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}} d\varepsilon \\
&= S_t e^{r(T-t)} \times \int_{-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} d\varphi \\
&= S_t e^{r(T-t)} \Phi\left(d_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{E}\left[S_T \mathbb{1}\left(S_T \geq X\right) | F_t\right] \\
&= \hat{E}\left[S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}} \mathbb{1}\left(\varepsilon \geq -d_2\right)\right] \\
&= S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \times \int_{-d_2}^{\infty} e^{\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon \\
&= S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} \times \int_{-d_2}^{\infty} e^{\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\varepsilon-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}} d\varepsilon \\
&= S_t e^{r(T-t)} \times \int_{-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2}} d\varphi \\
&= S_t e^{r(T-t)} \Phi\left(d_1\right)
\end{aligned}
$$

- 我们可以用股票和负债复制期权。
  - 可以证明，
    $$N(d_1) = \frac{\partial f}{\partial S}$$
    它是构造无风险组合Π时的Δ，是复制投资组合中股票的数量，$SN(d_1)$就是股票的市值。
  - 而$Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$则是复制交易策略中负债的价值。
- 由于主要参数都是时变的，因此这种复制策略是动态复制策略，必须不断调整相关头寸数量。

无收益资产欧式看涨期权定价公式理解

- 从金融工程的角度来看，欧式看涨期权可以分拆成或有资产看涨期权（Asset-or-nothing Call Option）多头和X份或有现金看涨期权（Cash-or-nothing Call Option）空头之和。

无收益资产欧式看涨期权定价公式理解

- $N(d_2)$是在风险中性世界中S_T大于X的概率，即欧式看涨期权被执行的概率，因此$Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$可以看成预期执行期权所需支付的现值。
- $N(d_1)$则是在以股票作为记账单位的风险中性世界里S_T大于X的概率。$SN(d_1)$ 可以看成期权持有者预期执行期权所得资产的现值。

- 而
$$e^{r(T-t)}SN(d_1) = \hat{E}[S_T | S_T > X] N(d_2)$$
则是在风险中性世界里，一个如果$S_T > X$就等于S_T否则就等于0 的一个变量的期望值，$SN(d_1)$则是这个值的贴现值，可以看成期权持有者预期执行期权所得收入的现值。
- 因此整个看涨期权定价公式就是在风险中性世界里期权未来期望回报的现值。

- 欧式平价看涨期权

$$
\begin{aligned}
\frac{c}{S} &= N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) \\
&= 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1
\end{aligned}
$$

平价期权c/S与波动率与期限的关系

波动率 \ 期限	0. 1	0. 2	0. 4	0. 5	0. 9	1	2	4	9	16
1%	0. 0013	0. 0018	0. 0025	0. 0028	0. 0038	0. 0040	0. 0056	0. 0080	0. 0120	0. 0160
2%	0. 0025	0. 0036	0. 0050	0. 0056	0. 0076	0. 0080	0. 0113	0. 0160	0. 0239	0. 0319
5%	0. 0063	0. 0089	0. 0126	0. 0141	0. 0189	0. 0199	0. 0282	0. 0399	0. 0598	0. 0797
10%	0. 0126	0. 0178	0. 0252	0. 0282	0. 0378	0. 0399	0. 0564	0. 0797	0. 1192	0. 1585
20%	0. 0252	0. 0357	0. 0504	0. 0564	0. 0756	0. 0797	0. 1125	0. 1585	0. 2358	0. 3108
30%	0. 0378	0. 0535	0. 0756	0. 0845	0. 1132	0. 1192	0. 1680	0. 2358	0. 3473	0. 4515
50%	0. 0630	0. 0890	0. 1256	0. 1403	0. 1875	0. 1974	0. 2763	0. 3829	0. 5467	0. 6827
70%	0. 0881	0. 1244	0. 1752	0. 1955	0. 2601	0. 2737	0. 3794	0. 5161	0. 7063	0. 8385
80%	0. 1007	0. 1420	0. 1997	0. 2227	0. 2957	0. 3108	0. 4284	0. 5763	0. 7699	0. 8904
100%	0. 1256	0. 1769	0. 2482	0. 2763	0. 3647	0. 3829	0. 5205	0. 6827	0. 8664	0. 9545

- 根据PCP 可得

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

- 对于平价期权，$c = p$

- 在标的资产无收益情况下，$C = c$，因此无收益资产美式看涨期权的定价公式同样是：

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

有收益资产的欧式期权的定价公式

- 在收益已知的情况下，我们可以把标的证券的价格分解成两部分：期权有效期内已知收益的现值部分和一个有风险部分。在期权到期之前，收益现值部分将由于标的资产支付收益而消失。
- 因此，只要从标的证券当前的价格S中消去收益现值部分，将剩下有风险部分的证券价格作为真正影响期权价值的标的资产价格，用σ表示证券价格中风险部分的波动率，就可直接套用公式分别计算出有收益资产的欧式看涨期权和看跌期权的价值。

有收益资产的欧式期权的定价公式

- 当标的证券已知收益的现值为I时，用$S-I$代替S。
- 当标的证券的收益为按连续复利计算的固定收益率q（单位为年）时，用$Se^{-q(T-t)}$代替S。

有收益资产的欧式期权的定价公式

- 一般来说，期货期权、股指期权和外汇期权都可以看作标的资产支付连续复利收益率的期权。
  - 欧式期货期权可以看作一个支付连续红利率为r 的资产的欧式期权
  - 股指期权则是以市场平均股利支付率为收益率
  - 外汇期权标的资产的连续红利率为该外汇在所在国的无风险利率

- 先确定提前执行美式看涨期权是否合理
  - 若不合理，则按欧式期权方法定价
  - 若在t_n提前执行可能是合理的，则要分别计算在T时刻和t_n时刻到期的欧式看涨期权的价格，然后将二者之中的较大者作为美式期权的价格。在大多数情况下，这种近似效果都不错。

- 美式看跌期权无论标的资产有无收益都有提前执行的可能，而且与其对应的看涨期权也不存在精确的平价关系，因此一般通过数值方法来求美式看跌期权的价值。

- BS期权定价公式中的期权价格取决于下列五个参数：标的资产市场价格、执行价格、到期期限、无风险利率和标的资产价格波动率
- 在这些参数当中，前三个都是很容易获得的确定数值。但是无风险利率和标的资产价格波动率则需要进行估计。
- 到期期限、无风险利率和波动率的时间单位必须相同（通常为年）。

估计无风险利率

- 使用连续复利的即期利率
- 美国：国债利率；中国：银行存款利率/国债市场即期利率
- 选择距离期权到期日最近的利率

估计标的资产价格的波动率

- 历史波动率
  - 移动平均模型
  - GARCH模型
- 隐含波动率

- 一、BSM 期权定价公式的精确度评价
- 二、BS期权定价公式的缺陷与拓展

- BS期权定价公式在定价方面存在一定偏差，但它依然是迄今为止解释期权价格动态的最佳模型之一，应用广泛，影响深远。
- BS期权定价与市场价格存在差异的主要原因：
    - 期权市场价格偏离均衡；
    - 使用错误的参数；
    - BS期权定价公式建立在众多假定的基础上。

- 无交易成本假设的放松
- 常数波动率假设的放松
- 参数假设的放松
- 资产价格连续变动假设的放松