第四章　数值积分与数值微分

——复合求积公式与Romberg算法

刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、知识回顾

当 $n \geq 8$ 时，Cotes系数出现负数，从而N-C公式不稳定！

若要提高计算精度怎么办？

（1）非等距节点

$f(x)$ 变化快的地方用密集节点，变化慢的地方用稀疏节点

（2）复合求积公式

① 将积分区间划分为若干子区间（通常等分）

② 在每个子区间上用低阶求积公式

二、复合梯形公式

将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$（通常等分）， $h_i=x_{i+1}-x_i$，那么

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\approx\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

等距节点复合梯形公式

注记：$\boldsymbol{n+1}$ 个节点

$$T_n=\frac{h}{2}\left\{f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right\},\quad h=\frac{b-a}{n}$$

2.1 余项公式

注记：收敛且稳定

一般节点的余项公式：

$$R[f] = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i^3}{12} f''(\xi_i)$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$

$\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$

等距节点的余项公式

$$R[f] = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = -\frac{b-a}{12}h^2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)\right] = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

$h = \frac{b-a}{n}$

$\eta \in (a, b)$

三、复合 Simpson 公式

将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$（通常等分）， $h_i=x_{i+1}-x_i$，那么

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\approx\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_i}{6}\left[f(x_i)+4f\left(x_{i+1/2}\right)+f(x_{i+1})\right]$$

等距节点**复合Simpson公式**

注记：$2n+1$ 个节点

$$S_n=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+1/2}\right)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right],\quad h=\frac{b-a}{n}$$

3.1 余项公式

注记：收敛且稳定

一般节点的余项公式：

$$R[f] = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i)$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$

$\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$

等距节点的余项公式

$$R[f] = -\frac{(b-a)h^4}{2880}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i)\right] = -\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\eta)$$

$h = \dfrac{b-a}{n}$

$\eta \in (a, b)$

例1 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，利用以下数据，分别用复合梯形公式与复合辛普森公式计算 $\int_0^1 f(x)\,dx$，并估计误差.

x_i	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1.0
$f(x_i)$	1	0.997	0.990	0.977	0.954	0.936	0.909	0.877	0.841

思考：如何编程

解：

$$T_8=\frac{h_T}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{7}f(x_i)+f(x_8)\right]=0.9456909,\quad h_T=\frac{1}{8}$$

$$S_4=\frac{h_S}{6}\left[f(x_0)+4\sum_{i=1}^{4}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{3}f(x_{2i})+f(x_8)\right]=0.9460832,\quad h_S=\frac{1}{4}$$

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos(xt)\,dt$$

$$f^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{d^k}{dx^k}\cos(xt)\,dt=\int_0^1 t^k\cos(xt+k\pi/2)\,dt$$

$$\max_{x\in[0,1]}\left|f^{(k)}(x)\right|\le\max_{x\in[0,1]}\int_0^1\left|t^k\cos\left(xt+\frac{k\pi}{2}\right)\right|dt\le\int_0^1 t^k\,dt=\frac{1}{k+1}$$

$$R_T[f]=\left|-\frac{b-a}{12}h_T^2f''(\xi)\right|\le 0.434\times10^{-3}$$

$$R_S[f]=\left|-\frac{b-a}{2880}h_S^4f^{(4)}(\xi)\right|\le 0.271\times10^{-6}$$

例2 计算 $\int_0^1 e^x\,dx$，分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算时，n 取多大才能使误差不超过 0.5×10^{-5}.

解： $f(x)=e^x$，$\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(k)}(x)\right| = \max\limits_{x\in[0,1]}|e^x| = e$

$$R_T[f] = \left|-\frac{b-a}{12}h_T^2 f''(\xi)\right| \le \frac{e}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \le 0.5\times 10^{-5}，n \ge 212.85，取 n = 213$$

$$R_S[f] = \left|-\frac{b-a}{2880}h_S^4 f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{e}{2880}\left(\frac{1}{n}\right)^4 \le 0.5\times 10^{-5}，n \ge 3.71，取 n = 4$$

四、Romberg 求积公式

采用复合求积公式计算时，如何选取**步长?**

太**大**，计算精度难保证；太**小**，增加额外计算量！

解决方法：采用**自适应步长**

将积分区间不断二分，即取 $n=2^k$，反复使用复合求积公式，

直到计算结果满足精度为止.

4.1　梯形法递推公式

（1）将 $[a,b]$ 等分为 n 个 $[x_i,x_{i+1}]$，$h=(b-a)/n$，则

$$T_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

（2）步长折半：$[x_i,x_{i+1/2}]$，$[x_{i+1/2},x_{i+1}]$

$$T_{2n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{4}\left[f(x_i)+f\left(x_{i+1/2}\right)+f\left(x_{i+1/2}\right)+f(x_{i+1})\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{4}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})+2f\left(x_{i+1/2}\right)\right]=\frac{T_n}{2}+\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(x_{i+1/2}\right)$$

$$\boldsymbol{T_{2n}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{T_n} + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + ih + \frac{1}{2}h\right)$$

$$\boldsymbol{T_{2^k}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{T_{2^{k-1}}} + \frac{h_{k-1}}{2}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} f\left(a + ih_{k-1} + \frac{1}{2}h_{k-1}\right)$$

$$h_{k-1} = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

例3 用梯形法的递推公式计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$，使得 $|T_{2n} - T_n| < 10^{-7}$.

解：

$$T_1 = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] \approx 0.9207355$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h_0}{2}\sum_{i=0}^{0} f(0 + ih_0 + 0.5h_0) \approx 0.9397933$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{h_1}{2}\sum_{i=0}^{1} f(0 + ih_1 + 0.5h_1) \approx 0.9445135$$

$\cdots\cdots$

思考：如何编程

k	T_2n	|T_2n-T_n|
1	0.920735492	
2	0.939793285	0.019057792
3	0.944513522	0.004720237
4	0.945690864	0.001177342
5	0.945985030	0.000294166
6	0.946058561	0.000073531
7	0.946076943	0.000018382
8	0.946081539	0.000004595
9	0.946082687	0.000001149
10	0.946082975	0.000000287

Ch4_3ex3.m

4.2 梯形法的加速

梯形法递推公式：算法简单、方便实现，但收敛太**慢**！

定理：设 $f(x) \in C^{\infty}[a,b]$，记 $T_n = T(h)$，则

$$T(h) = I(f) + \underbrace{\alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots + \alpha_i h^{2i} + \cdots}_{\text{余项}}$$

其中 α_i 与 h 无关.

提示：利用Taylor展开即可

4.3 Richardson 外推算法

$$T(h) = I(f) + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots, \qquad T\left(\frac{h}{2}\right) = I(f) + \alpha_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 +$$

$$\Longrightarrow 4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) = 3I(f) + \left(-\frac{3}{4}\right)\alpha_2 h^4 + \left(-\frac{15}{16}\right)\alpha_3 h^6 + \cdots$$

$$S(h) := \frac{1}{3}\left[4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)\right] = I(f) + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots = I(f) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$C(h) := \frac{1}{15}\left[16S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h)\right] = I(f) + \gamma_1 h^6 + \gamma_2 h^8 + \cdots = I(f) + \mathcal{O}(h^6)$$

$$R(h) := \frac{1}{63}\left[64C\left(\frac{h}{2}\right) - C(h)\right] = I(f) + \rho_1 h^8 + \rho_2 h^{10} + \cdots = I(f) + \mathcal{O}(h^8)$$

例4 用外推法计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$，使得 $|T_{2n} - T_n| < 10^{-7}$.

解:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 \approx 0.9207355 \\ \\ T_2 \approx 0.9397933 \end{array}\right\} \Longrightarrow S_1 = \frac{1}{3}(4T_2 - T_1) \approx 0.9461459$$

$$\left.\begin{array}{l} T_2 \approx 0.9397933 \\ \\ T_4 \approx 0.9445135 \end{array}\right\} \Longrightarrow S_2 = \frac{1}{3}(4T_4 - T_2) \approx 0.9460869$$

思考：如何编程

$$C_1 = \frac{1}{15}(16S_2 - S_1) \approx 0.94608300$$

4.4 Romberg 算法

记：$G_0 = T_{2^k}$，$G_1 = S_{2^k}$，$G_2 = C_{2^k}$，$G_3 = R_{2^k}$

$$G_m(h) = \frac{4^m G_{m-1}\left(\frac{h}{2}\right) - G_{m-1}(h)}{4^m - 1}$$

$$\begin{array}{llll}
T_1 = G_0(h) & & & \\
T_2 = G_0(h/2) & S_1 = G_1(h) & & \\
T_4 = G_0(h/4) & S_2 = G_1(h/2) & C_1 = G_2(h) & \\
T_8 = G_0(h/8) & S_4 = G_1(h/4) & C_2 = G_2(h/2) & R_1 = G_3(h) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

思考：如何编程

例5 用Romberg方法计算 $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx$，使得 $|G_m(h) - G_{m-1}(h)| < 10^{-7}$.

解:

```
clc, clear

a = 0;
b = 1;
h = b-a;
T(1) = h/2*(a^(3/2)+b^(3/2));

%% 迭代得到 T0
for n = 1:5

    hn = h/2^(n-1);
    xn = a + ( 0:2^(n-1)-1 )*hn + hn/2;
    T(n+1) = T(n)/2 + hn/2 * sum( xn.^(3/2) );

end

%% Romberg外推
G = zeros(size(T,2));
G(:,1) = T;

for m = 2: size(G,2)

    G(m:end,m) = ( 4^(m-1)*G(m:end,m-1) -G(m-1:end-1,m-1) )/(4^(m-1)-1);

end
```

0.500000000000000		0	0
0.426776695296637	0.40236	0	0
0.407018110857901	0.40043	0	0
0.401812464799974	0.40007	0	0
0.400463401302048	0.40001	)20324	0
0.400117671209778	0.40000	289272	0.400001516355028

小结

数值积分

↓

复合求积公式 → 余项、收敛性、稳定性

↓

梯形法递推与外推

习题与编程题见课程网页：

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] K. Liu et. al, A Multilevel Sampling Algorithm for Locating Inhomogeneous Media, Inverse Problems 29 (2013), 09500.