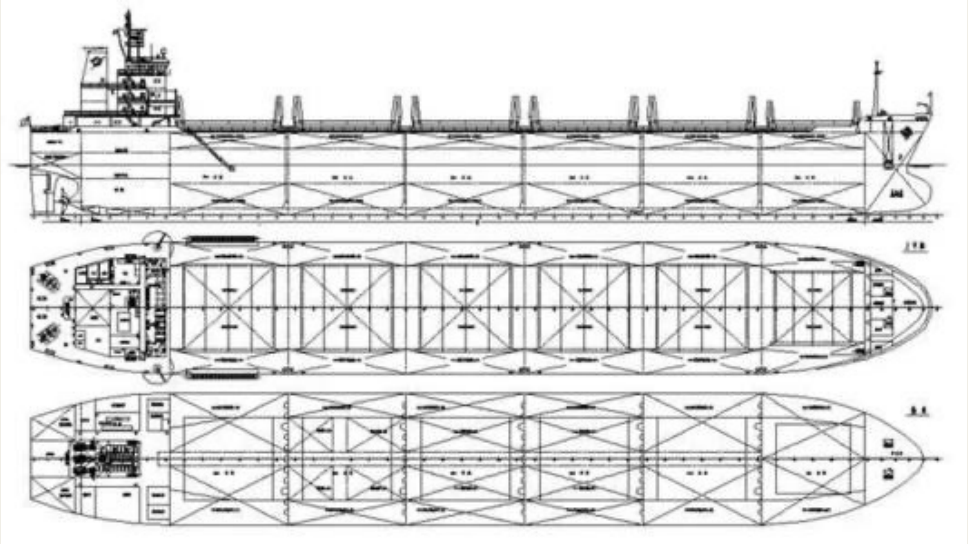
第五章　线性方程组的解法

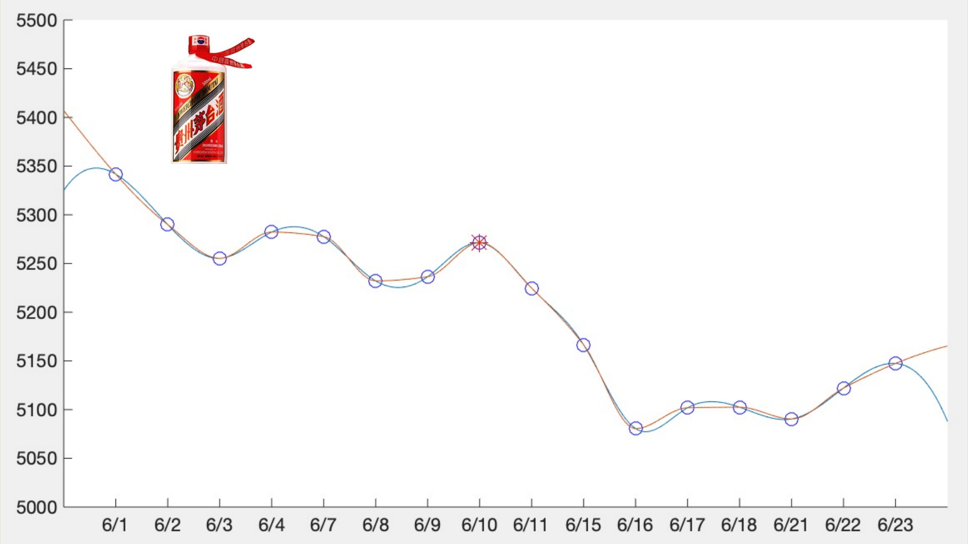
——Gauss消去法与矩阵分解法

刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、问题引入





船体放样

数据拟合

二、问题剖析

$$Ax = b，A \in \mathbb{R}^{n \times n}，b \in \mathbb{R}^n$$

常见解法：

（1）**直接法**：中小规模（阶数小于150）或特殊大规模稀疏方程组

（2）**迭代法**：大规模稀疏线性方程组（阶数高且 0 元素较多）

注：本章中假定 A：$\boldsymbol{n}$ **阶非奇异方阵**

三、基本概念与性质

矩阵的**谱**：$\sigma(A) = \{A\text{的所有特征值}\}$

矩阵**谱半径**：$\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$

矩阵的**迹**：$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$，$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

$A^{\top}$ 与 A：**相同**特征值，**不同**特征向量

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^{-1}x = \lambda^{-1}x$，$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

对称正定矩阵： $A^\top = A$，$x^\top Ax > 0\ (\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$

埃尔米特阵： $\bar{A}^\top = A$

正交矩阵： $\mathrm{A}^{-1} = A^\top$，**酉**矩阵： $A^{-1} = \bar{A}^\top$

初等置换阵：单位阵 I 交换第 i 行与第 j 列 (或第 i 列与第 j 行) 所得矩阵 I_{ij}

置换阵：初等置换阵乘积所得矩阵

上 Hessenberg 阵：$a_{ij} = 0$（$i > j + 1$）

3.1 重要性质

（1）$Ax = b$ 存在唯一解等价于：

① $\det(A) \neq 0$，② A 可逆，③ $Ax = 0$ 只有零解，④ $\text{rank}(A) = n$

（2）若 A 对称正定，则

① A^{-1} 对称正定，② 所有 $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$

③ 顺序主子阵 A_k 对称正定，$\det(A_k) > 0$

（3）若 $A^T = A$，所有顺序主子式大于0（或所有 $\lambda_i > 0$），则 A 对称正定

定理（Jordan标准型）：设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则存在非奇异阵 X，使

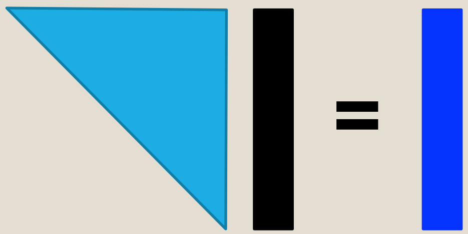
$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$ 为 Jordan 块，且 $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$

四、Gauss 消去法

思路：系数矩阵化为上三角阵



引例 用消去法求解 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$

解：$(A, b) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 9 & -2 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 61 & -61 \end{bmatrix}$

所以 $\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 = 7x_3 + 8 = 1 \\ x_1 = 2x_2 - 2x_3 - 2 = 2 \end{cases}$

记 $A^{(1)} = \left(a_{ij}^{(1)}\right)_{n\times n} = A$，$b^{(1)} = \left(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \cdots, b_n^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}$

第 1 步：消去第 1 列

设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$，$m_{i1} = a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$，$i = 2, 3, \cdots, n$，增广矩阵第 i 行 $- m_{i1}\times$第 1 行：

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}$$

（$i, j = 2, 3, \cdots, n$）

第 2 步：消去第 2 列

设 $a_{22}^{(2)} \neq 0$，$m_{i2} = a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$，$i = 3, 4, \cdots, n$，$B^{(1)}$ 第 i 行 $- m_{i2} \times$ 第 2 行：

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2} a_{2j}^{(2)}$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2} b_2^{(2)}$$

（$i, j = 3, 4, \cdots, n$）

依此类推，第 k 步：消去第 k 列

设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，$m_{ik} = a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$，$i = k+1,\cdots,n$，$B^{(k-1)}$ 第 i 行 $-\, m_{ik}\times$第 k 行：

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & a_{k+1k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k+1)} & b_{k+1}^{(k+1)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & a_{nk+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} & b_n^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}$$

$(i,j = k+1,\cdots,n)$

注记：

主元 $a_{kk}^{(k)} \neq 0 \Leftrightarrow D_k \neq 0$，且有 $a_{kk}^{(k)} = D_k/D_{k-1}\ (k \geq 2)$，$D_k$：$A$ 的顺序主子式

第 n-1 步后

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$A^{(n)}x = b^{(n)}$$

回代求解： $x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$

$$x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \right) / a_{ii}^{(i)}$$

4.1 Gauss 消去法的运算量

乘除运算总量：$\dfrac{n^3}{3}+n^2-\dfrac{n}{3}$

加减运算总量：$\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{5n}{6}$

乘除运算

第 k 步：（ $i=k+1,\cdots,n$ ）

$$① \; m_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}, \quad ② \; a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad ③ \; b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-m_{ik}b_k^{(k)}$$

$\boxed{n-k \text{ 次}}$ $\boxed{(n-k)^2 \text{ 次}}$ $\boxed{n-k \text{ 次}}$

回代求解：（$i=1,2,\cdots,n-1$）

$$x_n=\frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_i=\left(b_i^{(i)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j\right)/a_{ii}^{(i)}$$

$\boxed{\frac{1}{2}n(n+1) \text{ 次}}$

五、矩阵三角分解

Gauss 消去过程中第 k 步和第 $k+1$ 步的系数矩阵：

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \qquad A^{(k+1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & a_{kk+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{kn}^{(k+1)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{nk+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+!)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{(k+1)} = L_k A^{(k)}}$$

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

5.1 矩阵LU分解

注记：Matlab的 lu 函数

因此：$A^{(n)} = L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1A^{(1)}$

所以：$A = A^{(1)} = (L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1)^{-1}A^{(n)} = \overbrace{L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}}^{L}\overbrace{A^{(n)}}^{U}$

单位下三角阵　　非奇异上三角阵

$$L_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{k+1k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{nk} & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ m_{21} & 1 & & & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & & & \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

5.2 LU分解的存在唯一性

LU分解存在 $\Longleftrightarrow$ 高斯消去法可运行 $\Longleftrightarrow$ $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ $\Longleftrightarrow$ 顺序主子式均非 0

存在唯一性定理

A 的LU分解**存在唯一**的**充要条件**是 A 的**顺序主子式均非0**

注记：要求主元 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ 且**不可太小**，因此需选主元

5.3 LU分解的计算

注记：$A = LU \Longrightarrow Ly = b$，$Ux = y$

$$\begin{array}{ccc} A & & L & U \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

第 k 步：U 前 $k-1$ 行与 L 前 $k-1$ 列已求出（**Doolittle** 分解）

第 k 行：$u_{kj} = a_{kj} - (l_{k1}u_{1j} + l_{k2}u_{2j} + \cdots + l_{kk-1}u_{k-1j})$，$j = k, \cdots, n$

第 k 列：$l_{ik} = \dfrac{(a_{ik} - l_{i1}u_{1k} - \cdots - l_{ik-1}u_{k-1k})}{u_{kk}}$，$i = k+1, \cdots, n$

5.4 选主元 Gauss 消去法

列主元消去法（第 k 步消元时）

第 k 列剩余部分选主元：

① 选列主元： $\left|a_{i_k k}^{(k)}\right| = \max\limits_{k \le i \le n} \left\{\left|a_{ik}^{(k)}\right|\right\}$

② 若 $i_k \neq k$，则交换第 k 行与第 i_k 行

③ 消元

全主元消去法（第 k 步消元时）

剩余 $n-k$ 阶子阵中选主元：

① 选全主元： $\left|a_{i_k j_k}^{(k)}\right| = \max\limits_{k \le i, j \le n} \left\{\left|a_{ij}^{(k)}\right|\right\}$

② 若 $i_k \neq k$，则交换第 k 行与第 i_k 行

若 $j_k \neq k$，则交换第 k 列与第 j_k 列

③ 消元

5.5 PLU 分解

列主元 Gauss 消去法对应的矩阵分解为 PLU 分解

定理：若 A 非奇异，则存在排列阵 P，使得

$$PA = LU$$

其中 L 为单位下三角阵，U 为上三角阵.

思考：如何编程实现？

例1 求线性方程组的解

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 \\ -2.000 & 1.072 & 5.643 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{bmatrix}$$

解：

通过列主元Gauss消去法可求得：

$$x^* \approx [-0.4904,\ -0.05104,\ 0.3675]^{\mathrm{T}}$$

思考：**1. 不使用列选主元会如何？2. 如何编程？**

```matlab
AA = [0.001 2 3;-1 3.712 4.623;-2 1.072 5.643];
b = [1;2;3];
A = [AA b]; % 增广矩阵

for n = 1:size(A,1)

    %% 寻找列主元
    m = find( abs(A(n:end,n)) == max(abs(A(n:end,n))) );

    if A(m+n-1,n)==0

        disp('列主元有0元素，Gauss列主元消去法失败！')
        break;

    elseif m ~= 1

        B = A(m+n-1,n:end);
        A(m+n-1,n:end) = A(n,n:end);
        A(n,n:end) = B;

    end

    M = A(n,n:end)/A(n,n); % 计算 m_ik

    %% Gauss 消去（使用Kronock积Kron(A,b)，可去掉循环）
    A(n+1:end,n:end) = A(n+1:end,n:end) - kron(A(n+1:end,n),M);

end

%% 求解
x = zeros(size(A,1),1);

for n = size(A,1):-1:1

    if n == size(A,1)
       x(n) = A(n,end)/A(n,n);
    end

    x(n) = (A(n,end)-A(n,n+1:end-1)*x(n+1:end))/A(n,n);

end
fprintf('方程组的解为：[%g, %g, %g]\n\n',x(1),x(2),x(3));
```

Gaussian_elimination.m

```
A =

   -2.0000    1.0720    5.6430    3.0000
         0    3.1760    1.8015    0.5000
         0         0    1.8681    0.6866
```

```
方程组的解为：[-0.490396, -0.0510352, 0.36752]
```

六、平方根法

思考：如何证明

对称正定矩阵的三角分解—— $LDL^\top$ 分解

定理（$LDL^\top$ 分解）：设 A 为对称矩阵，A 的所有顺序主子式都非0，则

$$A = LDL^\top$$

上式分解唯一，其中 L 为单位下三角阵，D 为对角矩阵.

定理（Cholesky分解）：设 A 为对称正定阵，则存在实的非奇异下三角阵 $\tilde{L}$，

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^\top$$

当 $\tilde{L}$ 对角元素为正时，分解是唯一的.

6.1 Cholesky 分解计算

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} = \overset{\tilde{L}}{\begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & & & \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{l}_{n1} & \cdots & \tilde{l}_{nn-1} & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix}} \overset{\tilde{L}^{\top}}{\begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \cdots & \tilde{l}_{n1} \\ & \tilde{l}_{22} & & \tilde{l}_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix}}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{l}_{ik}\tilde{l}_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{l}_{ik}\tilde{l}_{jk} + \tilde{l}_{ij}\tilde{l}_{jj}, \quad j = 1,2,\cdots,n, \quad i = j, j+1, \cdots, n$$

Cholesky分解法：

注记：如何编程

对 $j = 1,2,\cdots,n$

（1）$\tilde{l}_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{l}_{jk}^2\right)^{\frac{1}{2}}$，（2）$\tilde{l}_{ij} = \frac{1}{\tilde{l}_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \tilde{l}_{ik}\tilde{l}_{jk}\right)$，$i = j+1,\cdots,n$

平方根法： $Ax = b$ (A对称正定) $\Rightarrow$ $\tilde{L}y = b$，$\tilde{L}^{\mathrm{T}}x = y$

$$y_1 = \frac{b_1}{\tilde{l}_{11}},\quad y_i = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik} y_k\right) / \tilde{l}_{ii}$$

$$x_n = \frac{y_n}{\tilde{l}_{nn}},\quad x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} \tilde{l}_{ki} x_k\right) / \tilde{l}_{ii}$$

注记：Matlab的 chol 函数

```
clc,clear

% A = [4 -1 1; -1 4.25 2.75; 1 2.75 3.5];
A = gallery('lehmer',6);

L = zeros(s
for n = 1:s

    if n==1
        L(n,
        L(n+
        cont
    end

    L(n,n) 

    if n~=s
        M = 
        L(n+1:end,n) = ( A(n+1:end,n)- sum(M,2) )/L(n,n);
    end

end
```

_ij中的求和项

```
L =

    1.0000         0         0         0         0         0
    0.5000    0.8660         0         0         0         0
    0.3333    0.5774    0.7454         0         0         0
    0.2500    0.4330    0.5590    0.6614         0         0
    0.2000    0.3464    0.4472    0.5292    0.6000         0
    0.1667    0.2887    0.3727    0.4410    0.5000    0.5528

>> max(norm(L'-chol(A)))

ans =

  2.6990e-16
```

Cholesky.m

6.2 改进的 Cholesky 分解

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}} \underset{D}{\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}} \underset{L^{\mathsf{T}}}{\begin{bmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} d_k l_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} + l_{ij} d_j, \quad j = 1,2,\cdots,n, \quad i = j+1, j+2, \cdots, n$$

改进的 Cholesky 分解法：

注记：如何编程

对 $j=1,2,\cdots,n$

（1）$d_j = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_k$，（2）$l_{ij} = \frac{1}{d_j}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}\right)$

改进的平方根法：$Ax=b$ (A对称正定) $\Rightarrow Ly=b$，$DL^T x = y$

$$y_1 = b_1,\quad y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k$$

$$x_n = \frac{y_n}{d_n},\quad x_i = \frac{y_i}{d_i} - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k$$

六、追赶法

注记：特殊的 LU 分解

对角占优的三对角阵的 Crout 分解：

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}} = \overset{L}{\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ a_1 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}} \overset{U}{\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix}}$$

第一步：$\alpha_1 = b_1$，$\beta_1 = c_1/\alpha_1 = c_1/b_1$

第二步：$\alpha_i = b_i - a_{i-1}\beta_{i-1}$，$\beta_i = c_i/\alpha_i$，$i = 2,3,\cdots,n-1$

第三步：$\alpha_n = b_n - a_{n-1}\beta_{n-1}$

追赶法：

注记：运算量为 $5n+3n$

$$Ax=f\ (\text{对角占优的三对角阵}) \Longrightarrow Ly=f，\ Ux=y$$

追：$\beta_1=\dfrac{c_1}{b_1}$，$\beta_i=\dfrac{c_i}{b_i-a_{i-1}\beta_{i-1}}$，$i=2,3,\cdots,n-1$

追：$y_1=\dfrac{f_1}{b_1}$，$y_i=\dfrac{f_i-a_{i-1}y_{i-1}}{b_i-a_{i-1}\beta_{i-1}}$，$i=2,3,\cdots,n$

赶：$x_n=y_n$，$x_i=y_i-\beta_i x_{i+1}$，$i=n-1,\cdots,2,1$

小结

- **线性方程组直接解法**
  - **Gauss 消去法**
    - **LU，PLU 分解**
    - **Crout 分解（追赶法）**
  - **平方根法**
    - **Cholesky 分解**

习题与编程题见课程网页：

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] 李丽等，改进Cholesky分解算法的设计与FPGA实现[J]，电讯技术， 2020(07): 845-849.