

第五、六章 习题

1、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & -5 \\ 16 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 计算 $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$.

2、设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \alpha x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

- a. 求 α 使该方程组无解.
- b. 求 α 使该方程组有无穷多个解.
- c. 若给定的 α 使方程组有唯一解, 求解该方程组.

3、记 x 和 $\tilde{x}$ 分别为线性方程组 $Ax = b$ 的精确解和估计解, 对下述线性方程组, 计算 $\|x - \tilde{x}\|_\infty$ 和 $\|A\tilde{x} - b\|_\infty$:

$$\begin{aligned} a. & \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168} \end{cases}, x = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^T, \tilde{x} = (0.142, -0.166)^T \\ b. & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}, x = (0, -7, 5)^T, \tilde{x} = (-0.2, -7.5, 5.4)^T \end{aligned}$$

4、设线性方程组

$$a. \begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 = 1 \\ 0.4x_1 + x_2 + 0.8x_3 = 2 \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad b. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

判断解此方程组的雅可比迭代法和高斯-赛德尔迭代法的收敛性, 并证明.

5、对线性方程组 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, 若用迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha (Ax^{(k)} - b), k = 0, 1, 2, \dots$$

求解, 求使迭代法收敛的 α 的取值范围, 求使迭代法收敛最快的 α 的值.

6、使用高斯消元法编程求解下列线性方程组.

$$a. \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 = \frac{1}{9} \end{cases} \quad b. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

7、使用矩阵分解方法编程求解以下矩阵的 LU 分解形式, 并要求矩阵 L 的对角线元素为 1.

$$a. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b. \begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$$

8、使用矩阵分解方法编程求解矩阵 A 的 LOL^T 分解形式.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

9、分别用雅可比迭代法、高斯-赛德尔迭代法和 SOR 方法编程求解下列线性方程组, 迭代终止条件为 l_∞ 范数下的误差小于 $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$a. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

$$b. \left\{ \begin{array}{rclclcl} 4x_1 & -x_2 & & -x_4 & & = & 0 \\ -x_1 & +4x_2 & -x_3 & & -x_5 & = & 5 \\ & -x_2 & +4x_3 & & & -x_6 & = & 0 \\ -x_1 & & & +4x_4 & -x_5 & & = & 6 \\ & -x_2 & & -x_4 & +4x_5 & -x_6 & = & -2 \\ & & -x_3 & & -x_5 & +4x_6 & = & 6 \end{array} \right.$$