第三章　函数逼近

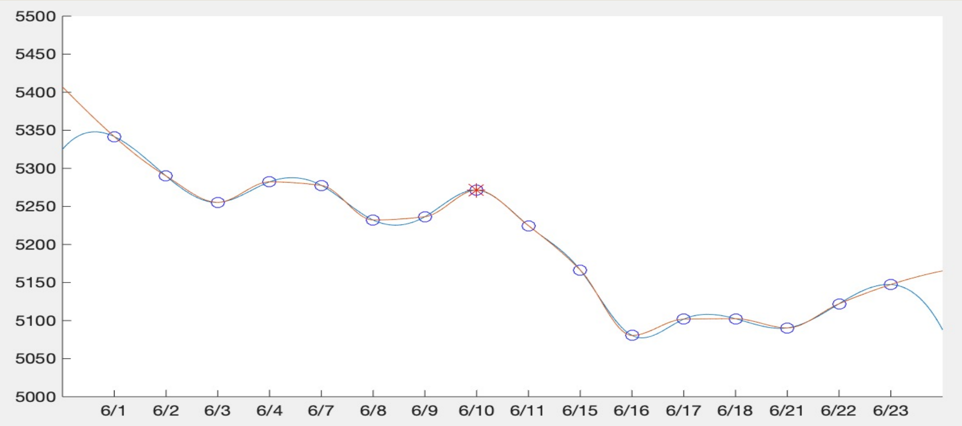
——引言与基本概念

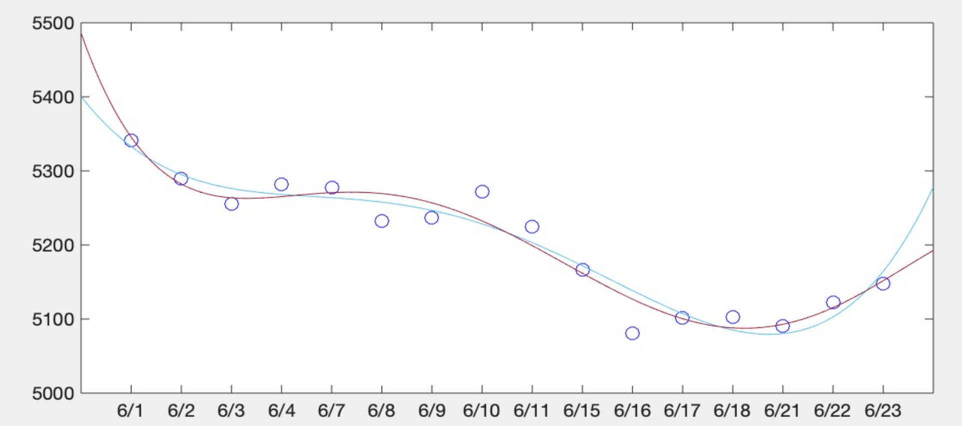
刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、问题引入

日期	沪深300收盘价
2021-06-01	5341.6798
2021-06-02	5289.9736
2021-06-03	5255.2855
2021-06-04	5282.2772
2021-06-07	5277.6271
2021-06-08	5232.1165
2021-06-09	5236.4493
2021-06-10	5271.4661
2021-06-11	5224.7030
2021-06-15	5166.5597
2021-06-16	5080.4909
2021-06-17	5101.8924
2021-06-18	5102.4657
2021-06-21	5090.3854
2021-06-22	5122.1583
2021-06-23	5147.3938





还会涨吗？

二、问题剖析

1. **函数插值**

给定数据 (x_i, y_i)，寻找**简易**的 $P(x)$，使得 $P(x_i) = y_i$

2. **函数逼近**

给定 $f(x)$，在**简易**函数类中找一个 $P(x)$，使 $P(x)$ 在某种度量下离 $f(x)$ 最近

3. **曲线拟合（数据拟合）**

给定带误差的数据 (x_i^δ, y_i^δ)，在**简易**函数类中找一个 $P(x)$，

使 $P(x)$ 在某种度量下离 $f(x)$ 最近

三、预备知识

1. 线性空间、线性相关、线性无关
2. 线性空间的基、维数、有限维空间、无限维空间
3. 常见线性空间：$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{C}^n$，H_n，$C[a,b]$，$C^n[a,b]$
4. **Weierstrass 定理**

已知 $f(x) \in C[a,b]$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists P(x) \in H_n$，使得

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

在 $[a,b]$ 上一致成立.

收敛太慢，不实用

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

3.1 范数与赋范线性空间

定义 设 S 为线性空间，$x \in S$，若存在唯一实数 $\|\cdot\|$ 满足

（1）$\|x\| \geq 0$，等号当且仅当 $x = 0$ 时成立（**正定性**）

（2）$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall \alpha \in R$（**齐次性**）

（3）$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$（**三角不等式**）

则称 $\|\cdot\|$ 为 S 上的范数，称 $(S, \|\cdot\|)$ 为**赋范线性空间**.

注记：本课程常用的线性空间：$\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{C[a,b]}$

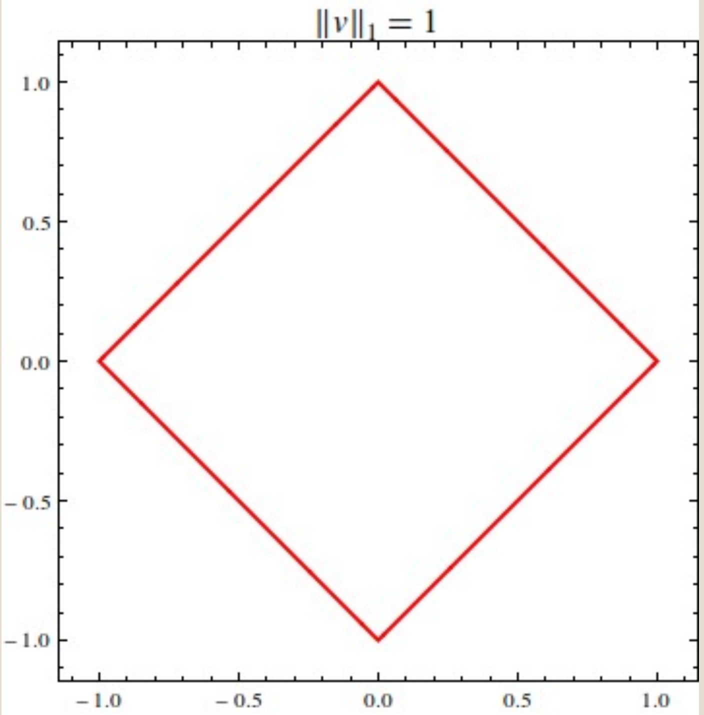
赋范线性空间 $\mathbb{R}^n$

1□范数：$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

p□范数：$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

∞□范数：$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

$\mathbb{R}^2$ 中 $\|v\|_p = 1$



赋范线性空间 $C[a,b]$

1□范数： $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$

p□范数： $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$

2□范数： $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

∞□范数： $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$

3.2 内积与内积空间

定义 设 X 为数域 K($\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$)上的线性空间，对 $\forall u,v\in X$，有K中的数(u,v)与之对应，且满足

（1）$\overline{(u,v)}=(v,u)$

（2）$(\alpha u,v)=\alpha(u,v)$, $\alpha\in K$

（3） $(u+v,w)=(u,w)+(v,w)$, $\forall w\in X$

（4） $(u,u)\geq 0$，等号当且仅当 $u=0$ 成立

称 (u,v) 为 X 上的**内积**，定义了内积的线性空间称为**内积空间**.

常见内积

内积空间 $\mathbb{R}^n$（欧式空间）：$(x,y)=y^{\mathrm{T}}x=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

内积空间 $\mathbb{C}^n$（酉空间）：$(x,y)=y^{*}x=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$

内积空间 $\mathrm{C}[a,b]$：$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

正交、Cauchy-Schwarz不等式与Gram矩阵

定义：设 X 是内积空间，$u,v\in X$，若 $(u,v)=0$，则称 u,v **正交**.

定理：设 X 是数域 K 上的内积空间，对 $\forall u,v\in X$ 有

Cauchy–Schwarz不等式：$|(u,v)|^2\le (u,u)(v,v)$

定义：设 X 是内积空间，$u_1,u_2,\cdots,u_n\in X$，**Gram 矩阵**为

$$G=\begin{bmatrix}(u_1,u_1) & (u_2,u_1) & \cdots & (u_n,u_1)\\ (u_1,u_2) & (u_2,u_2) & \cdots & (u_n,u_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (u_1,u_n) & (u_2,u_n) & \cdots & (u_n,u_n)\end{bmatrix}$$

定理：G 非奇异 $\Leftrightarrow u_1,u_2,\cdots,u_n$ 线性无关

提示：$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i, u_j\right)=\sum_{i=1}^{n}(u_i,u_j)\alpha_i=0$，$j=1,2,\cdots,n$

内积与导出范数

定义：设 X 是内积空间，$\forall u \in X$，定义**内积导出范数**为：

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

例1 由 $\mathbb{R}^n$上的内积，可定义导出的范数为

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

即为 **2-范数**.

$\mathbb{R}^n$与 $\mathbb{C}^n$ 上的加权内积

定义：设 $x, y \in \mathbb{R}^n$，给定正实数 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，称

$$(x, y)_\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i y_i$$

为加权内积， $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$称为权系数.

若 $x, y \in \mathbb{C}^n$，则加权内积为：

$$(x, y)_\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i \bar{y}_i$$

权函数

定义：设 $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**非负函数**，满足

（1）$\int_a^b x^k\rho(x)dx$ 存在且为有限值 $(k=0,1,2,\cdots)$

（2）对 $\forall$ 非负 $g(x)\in C[a,b]$，如果

$$\int_a^b g(x)\rho(x)\,dx=0，则\ g(x)\equiv 0$$

称 $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个**权函数**.

注记：

1. $[a,b]$ **可以是无限区间**

2. $\rho(x)$ **与定义区间有关**

常见的权函数

1. $\rho(x) = 1$，$x \in [-1,1]$

2. $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$x \in [-1,1]$

3. $\rho(x) = e^{-x}$，$x \in [0,+\infty)$

4. $\rho(x) = e^{-x^2}$，$x \in \mathbb{R}$

$C[a,b]$ 上的加权内积

设 $\rho(x)$ 是 $[a,b]$ 上的权函数，$f(x)$，$g(x) \in C[a,b]$

$$(f,g)_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx$$

为加权内积

$$\|f\|_\rho = (f,f)_\rho^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

为导出范数

连续函数的 Gram 矩阵

定理：设 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n \in C[a, b]$，则 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 线性无关当且仅当 $\det(G) \neq 0$

$$G = G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix}$$

四、函数逼近

定义：记 Φ 为某函数空间，给定 $f(x) \in C[a,b]$，若 $\exists g^*(x) \in \Phi$ 使得

$$\|f(x) - g^*(x)\| = \min_{g(x)\in\Phi} \|f(x) - g(x)\|$$

称 $g^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最佳逼近函数.

思考：

1. 选取什么函数空间 Φ？

2. 选取什么范数 $\|\cdot\|$ 来度量？

4.1 最佳逼近多项式

定义：记 H_n 为次数不超过 n 的多项式集合，给定 $f(x) \in \mathrm{C}[a,b]$，

若$\exists P^*(x) \in H_n$ 使得

$$\|f(x) - P^*(x)\| = \min_{P(x)\in H_n} \|f(x) - P(x)\|$$

称 $P^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最佳逼近多项式**.

注记：**不同范数** $\|\cdot\|$ 对应不同的最佳逼近方式

4.2 常用的最佳逼近多项式

1. 最佳平方逼近多项式

$$\|f-P^*(x)\|_2=\min_{P(x)\in H_n}\|f(x)-P(x)\|_2$$

2. 最佳一致逼近多项式

$$\|f-P^*(x)\|_\infty=\min_{P(x)\in H_n}\|f(x)-P(x)\|_\infty$$

4.3 曲线拟合（最小二乘拟合）

定义：给定数据 (x_i, y_i)，若 $\exists\, g^*(x) \in \Phi$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - g^*(x_i)|^2 = \min_{g(x)\in\Phi} \sum_{i=1}^{m} |y_i - g(x_i)|^2$$

称 $g^*(x)$ 为 $f(x)$ 的**最小二乘拟合函数**

若 $\Phi = H_n$，称 $g^*(x)$ 为 $f(x)$ 的**最小二乘拟合多项式**

注记：最小二乘拟合常用于数据拟合

小结

函数逼近

函数空间
（多项式空间）

度量空间
（内积与不同范数）

最佳平方逼近
最佳一致逼近
最小二乘拟合

习题与编程题见课程网页：

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] 刘仁杰等，基于曲线拟合的探地雷达层状介质参数反演算法[J]，信号处理，2021 online.