第四章　数值积分与数值微分

——引言与Newton-Cotes公式

刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、问题引入

区域 → 面积

曲线 → 长度

速度 → 路程

二、问题剖析

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

若 $f(x)$ 原函数为 $F(x)$，由 Newton-Leibniz 公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

$$\frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{6}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+C$$

原函数

考虑：$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$f(x)=e^{x^2}$，$f(x)=\sqrt{1+k^2\sin x^2}$，$f(x)=\dfrac{1}{1+x^6}$

方法 1：

如何确定？

积分中值定理：$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$，$\xi \in (a,b)$

方法 2：回到积分定义！

1.划分（化整为零）

2.近似（以直代曲）

3.求和（积零为整）

4.极限（抛光磨平）

$\xrightarrow{\text{近似}}$

梯形公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}$$

中矩形公式

三、机械求积公式

若取离散点

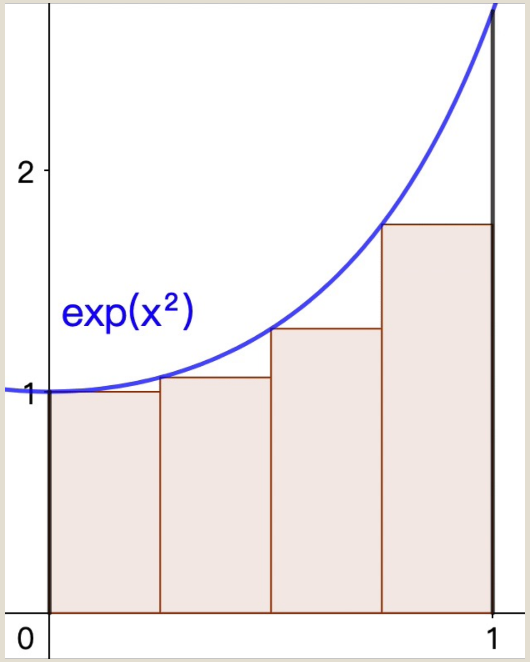
$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

上函数值的加权平均作为 $f(\xi)$ 的近似值，那么

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

称为**机械求积公式**， A_i 称为求积系数（权）， x_i 称为求积节点.

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$



四、代数精度

定义　若求积公式对次数不超过 m 的多项式都<u>准确成立</u>，但对 $m+1$ 次多项式<u>不准确成立</u>，则称该求积公式具有 m 次代数精度.

代数精度验证方法:

（1）将 $1, x, x^2, \cdots, x^m$ 依次代入，公式准确成立

（2）将 x^{m+1} 代入，公式不准确成立

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} A_k = b-a \quad \text{(系数和=区间长度)} \\ \sum_{k=0}^{n} A_k x_k = \frac{1}{2}(b^2-a^2) \\ \quad\vdots \\ \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1}) \end{cases}$$

注记：1. 代数精度是衡量精确程度的重要指标

2. 梯形公式和中矩形公式：1 次代数精度

思考：A_k存在唯一吗？

例1 试确定 A_i 使得以下求积公式具有最高代数精度

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

解： 将 $1, x, x^2$ 代入求积公式，

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -A_0 + A_2 = 0 \\ A_0 + A_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}，\ 得\ A_0 = \frac{1}{3}，\ A_1 = \frac{4}{3}，\ A_2 = \frac{1}{3}$$

所以 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1)$

对 x^3 仍准确成立，但对 x^4 不成立

故代数精度为 3 次.

例2 试确定 A_i 使得以下求积公式具有最高代数精度

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$$

解：将 $1, x, x^2$ 代入求积公式，

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_1 + B_0 = 0.5 \\ A_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}，\quad 得\ A_0 = \frac{2}{3}，\ A_1 = \frac{1}{3}，\ B_0 = \frac{1}{6}$$

所以 $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0)$

对 x^3 不成立，故代数精度为 **2** 次

五、插值型求积公式

定义 用**插值多项式**代替原函数，得到的求积公式即为**插值型求积公式**

已知求积节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 及 $f(x_i)$，构造 n 次插值多项式

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

那么

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b l_i(x)\,dx \right) f(x_i) := \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)}$$

余项（误差）：

$$R[f] = \int_a^b \big(f(x) - L_n(x)\big)\, dx = \int_a^b R_n(x)\, dx$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

定理：机械求积公式至少具有 n 次代数精度 $\Longleftrightarrow$ **插值型求积公式**

六、收敛性与稳定性

定义：设求积节点 $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$，若机械求积公式满足

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

其中 $h = \max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i - x_{i-1}\}$，则称其收敛.

定义：对 $\forall \varepsilon > 0$，若 $\exists \delta > 0$，当 $\left|\tilde{f}_i - f(x_i)\right| \leq \delta\ (i = 0,1,\cdots,n)$ 时，

$$\left|\sum_{i=0}^{n} A_i \tilde{f}_i - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)\right| \leq \varepsilon$$

则称求积公式稳定.

定理：若 $A_i > 0\ (i = 0,1,\cdots,n)$，则求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

是**稳定**的.

提示: $\left|\sum_{i=0}^{n} A_i[\tilde{f}_i - f(x_i)]\right| \le \sum_{i=0}^{n} |A_i|\,|\tilde{f}_i - f(x_i)|$

$$\le \delta \sum_{i=0}^{n} A_i = \delta(b-a) = \varepsilon\ (设\ \delta = \frac{\varepsilon}{b-a})$$

注记：

1. **收敛**：求积公式可以用
2. **稳定**：求积公式可以放心用

七、Newton-Cotes 公式

定义：基于**等距节点**的插值型求积公式称为 **Newton-Cotes 公式**.

积分区间：$[a,b]$，求积节点：$x_i = a + i \cdot h$，$h = (b-a)/n$

N-C求积公式：

Cotes系数

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

$$C_i^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_i^{(n)}(x)\,dx = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}\,dt = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(t-k)\,dt$$

（1）梯形公式：$n=1$ 时，$C_0^{(1)}=C_1^{(1)}=\frac{1}{2}$

$$\boldsymbol{T} := \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

代数精度 **1**

（2）**Simpson公式：** $n=2$ 时，$C_0^{(2)}=\frac{1}{6}$，$C_1^{(2)}=\frac{2}{3}$，$C_2^{(2)}=\frac{1}{6}$

$$\boldsymbol{S} := \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

代数精度 **3**

（3）**Cotes公式**：$n=4$ 时，

$$C_0^{(4)}=\frac{7}{90},\quad C_1^{(4)}=\frac{32}{90},\quad C_2^{(4)}=\frac{12}{90},\quad C_3^{(4)}=\frac{32}{90},\quad C_4^{(4)}=\frac{7}{90}$$

$$\boldsymbol{C}\coloneqq\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

代数精度 **5**

Cotes 系数特点（部分系数见104页表4-1）：

（1）$\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1$，其中 $C_i^{(n)} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b l_i^{(n)}(x)\,dx$

（2）$C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$

（3）当 $n \geq 8$ 时，系数出现负数，**不稳定**，并且 n 较大时，会有Runge现象，

无法保证收敛性.

注记：一般采用**低阶稳定**的N-C求积公式（$n \leq 7$）

7.1 Newton-Cotes 公式的代数精度

定理：n 阶 N-C 公式至少有 n 次代数精度.

定理：当 n 为**偶数**时， N-C 公式至少有 $n+1$ 次代数精度.

证明：考虑 $f(x)=x^{n+1}$，$x=a+th$，$x_i=a+ih$

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx=\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx=h^{n+2}\int_0^n \prod_{i=0}^{n}(t-i)\,dt$$

若 n 为偶数，则 $n/2$ 为整数，令 $t=u+n/2$，则

$$R[f]=h^{n+2}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \prod_{i=0}^{n}\left(u+\frac{n}{2}-i\right)du=0$$

思考：为什么？

7.2　求积公式的余项

$$R[f] = \int_a^b f(x)\,dx - I(f) = Kf^{(m+1)}(\xi)$$，$I(f)$ 为代数精度m的求积公式

思考：$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$的余项

（1）**梯形公式**

$$R[f] = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

（2）**Simpson 公式**

$$R[f] = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

定理　Newton-Cotes 公式的余项可分为以下两种情况

（1）当 n 为**奇数**时，设 $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$

$$R[f] = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt, \quad \xi \in (a,b)$$

（2）当 n 为**偶数**时，设 $f(x) \in C^{n+2}[a,b]$

$$R[f] = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt, \quad \xi \in (a,b)$$

小结

数值积分

↓

机械求积公式

↓

插值型求积公式

（Newton-Cotes公式）

代数精度、余项

收敛性、稳定性

习题与编程题见课程网页：

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] K. Liu et. al, A Multilevel Sampling Algorithm for Locating Inhomogeneous Media, Inverse Problems 29 (2013), 09500.