第一章

1. 已知$a=1.2031$，$b=0.978$是经过四舍五入后得到的近似值，问$a+b$，$a\times b$有几位有效数字？（有效数字的计算）

答案：

$\left|a-a^*\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$，$\left|b-b^*\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$，而$a+b=2.1811$，$a\times b=1.1766$

$$\left|(a+b)-(a^*+b^*)\right|\le\left|a-a^*\right|+\left|b-b^*\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-2}\le\frac{1}{2}\times10^{1-2}$$

故$a+b$至少具有 2 位有效数字.

$$\left|(ab)-(a^*b^*)\right|\le b\left|a-a^*\right|+a^*\left|b-b^*\right|\le\frac{0.978}{2}\times10^{-3}+\frac{1.2031}{2}\times10^{-2}=0.0065\le\frac{1}{2}\times10^{1-2}$$

故$a\times b$至少具有 2 位有效数字.

2. 试改变下列表达式使计算结果比较精确

（1） $\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}},|x|\ll1$

（2） $\sqrt{x+1}-\sqrt{x},|x|\gg1$

（3） $\frac{1-\cos x}{x},x\ne0,|x|\ll1$

答案：

（1） $\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\tan\frac{x}{2}$

（2） $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

（3） $\frac{1-\cos x}{x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\approx\frac{x}{2}$

3. 若$x_1\approx0.937$具有 3 位有效数字

（1） 求 x_1 的相对误差限

（2） 设 $f(x)=\sqrt{1-x}$，求 $f(x_1)$ 的绝对误差限和相对误差限

答案：

（1） $x_1 \approx 0.937$ ， $|e(x_1)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$

$$|e_r(x_1)| = \left|\frac{e(x_1)}{x_1}\right| \le \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{0.937} = 0.534\times 10^{-3}$$

（2） $f(x)=\sqrt{1-x}$， $f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$， $e(f)\approx f'(x)e(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}e(x)$

$$|e(f(x_1))| \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}|e(x_1)| \le \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1-0.937}}\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} = 0.996\times 10^{-3}$$

$$e_r(f) = \frac{e(f)}{f} \approx -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}e(x)$$

$$|e_r(f(x_1))| \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x_1}|e(x_1)| \le \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-0.937}\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} = 0.00397 = 3.97\times 10^{-3}$$

4．序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系

$y_n = 10y_{n-1} - 1$，$(n=1,2,\cdots)$

若 $y_0=\sqrt{2}\approx 1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

答案：

因 $y_0=\sqrt{2}$， $y_0^*=1.41$，而

$$|y_0 - y_0^*| \le \frac{1}{2}\times 10^{-2} = \delta$$

$$|y_1 - y_1^*| = |10y_0 - 1 - 10y_0^* + 1| = 10|y_0 - y_0^*| \le 10\delta$$

$$|y_2 - y_2^*| = |10y_1 - 1 - 10y_1^* + 1| = 10|y_1 - y_1^*| \le 10^2\delta$$

类推可得

$$|y_{10} - y_{10}^*| \le 10^{10}\delta = \frac{1}{2}\times 10^{8}$$

即计算到y_{10}，其误差限为 $10^{10}\delta$，亦即若在y_0处有误差限为δ，则 y_{10}的误差限将扩大10^{10}倍，可见这个计算过程是不稳定的.