第三章

1. 求下列函数的三次最佳一致逼近多项式

$$f(x)=2x^4\,,x\in[-1,1]$$

$$f(x)=x^4\,,x\in[0,2]$$

答案：

（1）

设x^4的三次最佳一致逼近多项式为$P_3(x)$, 于是$x^4-P_3(x)$是$[-1,1]$上距离零点最近的首项系数为 1 的四次多项式，故有

$$x^4-P_3(x)=\frac{1}{8}T_4(x)=\frac{1}{8}[8x^4-8x^2+1]=x^4-x^2+\frac{1}{8}$$

$$P_3(x)=x^4-\left[x^4-x^2+\frac{1}{8}\right]=x^2-\frac{1}{8}$$

于是得到$f(x)=2x^4$的三次最佳一致逼近多项式为

$$2P_3(x)=2x^2-\frac{1}{4}$$

（2）

令$x=t+1,-1\le t\le 1,f(t)=(t+1)^4\equiv g(t)$, 这样变成求$g(t)=(t+1)^4$在$[-1,1]$上的三次最佳一致逼近多项式

$$P_3(t)=\ g(t)-\frac{1}{8}T_4(t)=g(t)-\frac{1}{8}[8t^4-8t^2+1]=4t^3+7t^2+4t+\frac{7}{8}$$

又有$x=t+1$，所以$f(x)=x^4\,,x\in[0,2]$ 上的三次最佳一致逼近多项式为

$$P_3(x-1)=4(x-1)^3+7(x-1)^2+4(x-1)+\frac{7}{8}=4x^3-5x^2+2x-\frac{1}{8}$$

2. 对权函数$\rho(x)=1+x^2$, 区间$[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式$\varphi_n(x),n=0,1,2,3.$

答案：

定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,\rho(x)dx$$

那么

$$\varphi_0(x)=1，\alpha_0=\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{0}{8/3}=0,$$

$$\varphi_1(x)=(x-\alpha_0)\varphi_0=x,$$

$$\alpha_1=\frac{(x\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{0}{16/15}=0,\beta_1=\frac{(\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{16/15}{8/3}=\frac{2}{5},$$

$$\varphi_2(x)=(x-\alpha_1)\varphi_1-\beta_1\varphi_0=x^2-\frac{2}{5},$$

$$\alpha_2 = \frac{(x\varphi_2, \varphi_2)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = \frac{0}{136/525} = 0, \beta_2 = \frac{(\varphi_2, \varphi_2)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{136/525}{16/15} = \frac{17}{70},$$

$$\varphi_3(x) = (x - \alpha_2)\varphi_2 - \beta_2\varphi_1 = x^3 - \frac{9}{14}x.$$

3.求 $f(x) = x^2 + 3x + 2, x \in [0,1]$, 试求$f(x)$在区间 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式.

答案:

取$f(x) = x^2 + 3x + 2, \Phi = span\{1, x\}$, 权函数$\rho(x) \equiv 1$, 做内积，得到:

$$(1, f) = \int_0^1 (x^2 + 3x + 2)\, dx = \frac{23}{6},$$

$$(x, f) = \int_1^2 x(x^2 + 3x + 2)\, dx = \frac{9}{4},$$

$$(1,1) = \int_0^1 1\, dx = 1, (1, x) = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2},$$

$$(x, x) = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3},$$

这样得到法方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{6} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

解得:

$$a_0 = \frac{11}{6}，\ a_1 = 4，$$

所以$f(x) = x^2 + 3x + 2$在区间 $[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式为

$$P_2(x) = 4x + \frac{11}{6}$$

4.证明对每一个切比雪夫多项式$T_n(x)$，有

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)^2}{\sqrt[2]{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

答案：

假设$x = cos\theta$, 则$T_n(x) = \cos(n\theta)$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)^2}{\sqrt[2]{1-x^2}} dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)^2}{sin\theta}(-sin\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\cos(2n\theta))d\theta = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$