第六章　非线性方程(组)数值解法

——引言、二分法与不动点迭代

刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、问题引入

盆地低谷

山峦高峰

最高时速

二、问题剖析

$$f(x)=0,\ x\in\mathbb{R},\ f(x)\in C[a,b]$$

（1）**代数方程**（ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ ）

线性方程直接求解，二次方程有求根公式

三次及以上方程难求解

（2）**超越方程**（无法用自变量的多项式或开方表示，如：$e^{-x}\sin x=0$ ）

无法直接求解

注记：实际中的方程问题通常**迭代法数值求解**

基本概念

（1）根的重数

若 $f(x) = (x - x^*)^m \cdot g(x)$ 且 $g(x^*) \neq 0$，则 x^* 为 $f(x) = 0$ 的 $\boldsymbol{m}$ 重根

（2）有解区间

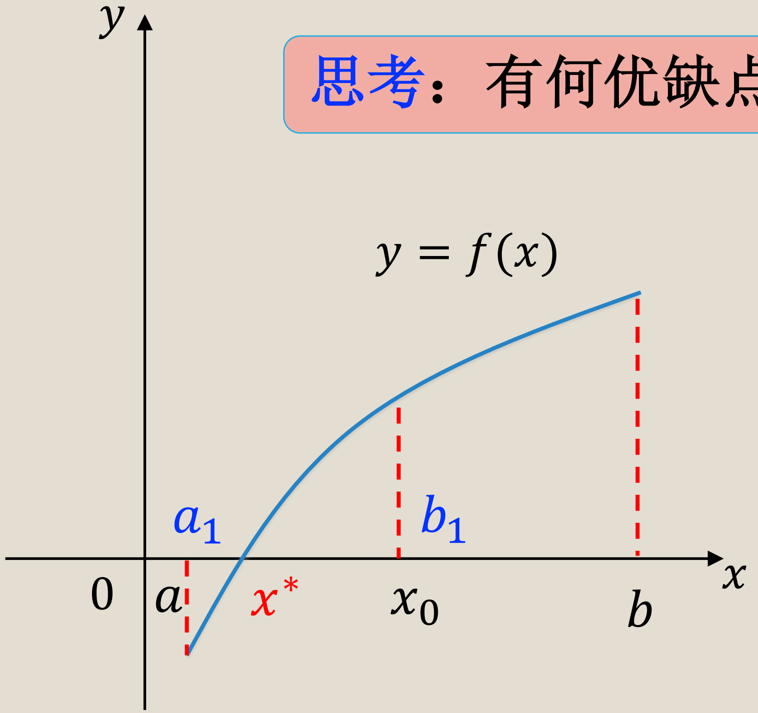
若 $[a, b]$ 上至少有 $f(x) = 0$ 的一个实根，则 $[a, b]$ 为有解区间

本章内容：在有解区间中寻找方程的近似解

三、二分法

介值定理：若 $f(x) \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$

二分法思路：不断二分有根区间，直至有根区间长度足够小为止



思考：有何优缺点？

第一步：找到 $[a,b]$ 并取中点 x_0 将其二分

第二步：确定新有根区间 $[a_1,b_1]$ 并二分

…

第 n 步：近似解 $x^* \in [a_n,b_n]$ 且 $|a_n - b_n| < \varepsilon$

3.1 收敛性分析

已知 $f(x) \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$

记 $[a_k, b_k]$ 为第 k 步的有解区间，中点为 $x_k = 0.5(a_k + b_k)$，则

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{4} = \cdots = \frac{b_1 - a_1}{2^k}$$

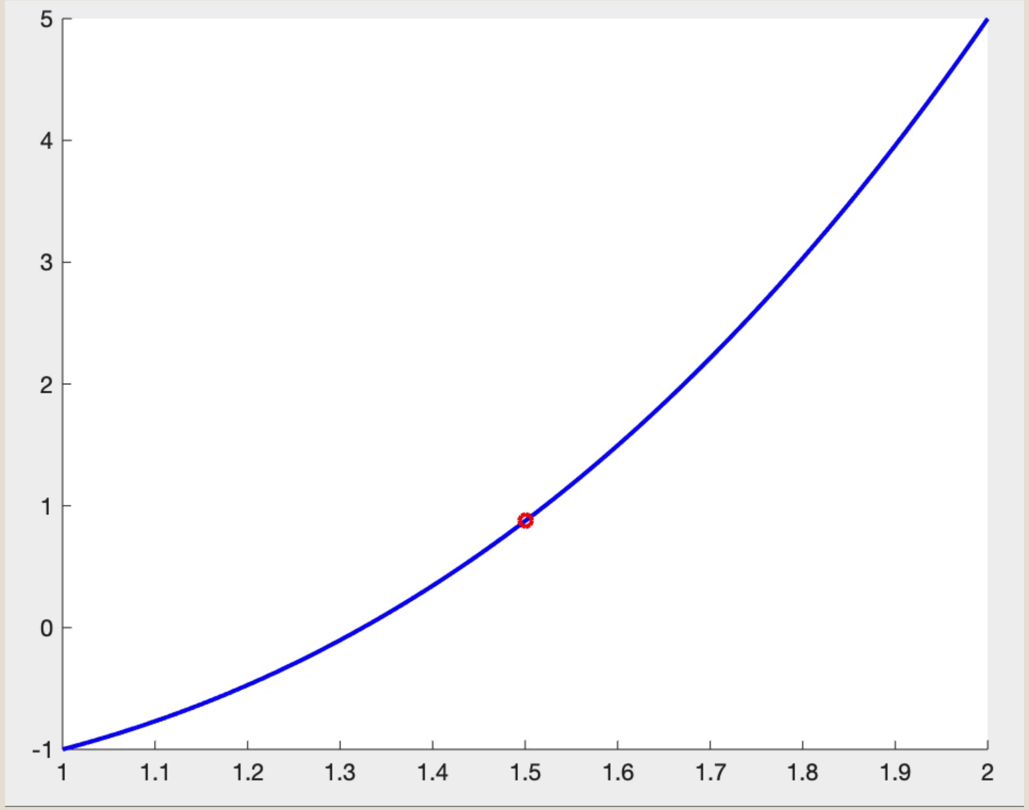
所以

收敛性：$|x_k - x^*| \leq \dfrac{b-a}{2^{k+1}} \to 0(k \to +\infty)$

例1 求 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 在 $[1,2]$ 内的实根. Ch7_1ex1_bisection.m

解： 由 $f(1) = -1$，$f(2) = 5$ 可知 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 内含实根

```
第1步: 有根区间为: [1.000000,1.500000]
第2步: 有根区间为: [1.250000,1.500000]
第3步: 有根区间为: [1.250000,1.375000]
第4步: 有根区间为: [1.312500,1.375000]
第5步: 有根区间为: [1.312500,1.343750]
第6步: 有根区间为: [1.312500,1.328125]
第7步: 有根区间为: [1.320312,1.328125]
第8步: 有根区间为: [1.324219,1.328125]
第9步: 有根区间为: [1.324219,1.326172]
第10步: 有根区间为: [1.324219,1.325195]
第11步: 有根区间为: [1.324707,1.325195]
第12步: 有根区间为: [1.324707,1.324951]
第13步: 有根区间为: [1.324707,1.324829]
第14步: 有根区间为: [1.324707,1.324768]
第15步: 有根区间为: [1.324707,1.324738]
第16步: 有根区间为: [1.324707,1.324722]
```



四、不动点迭代

定义：构造 $f(x)=0$ 的等价方程：$x=\varphi(x)$，若 $f(x^*)=0 \Leftrightarrow x^*=\varphi(x^*)$，则称 x^* 为 $\varphi(x)$ 的一个不动点.

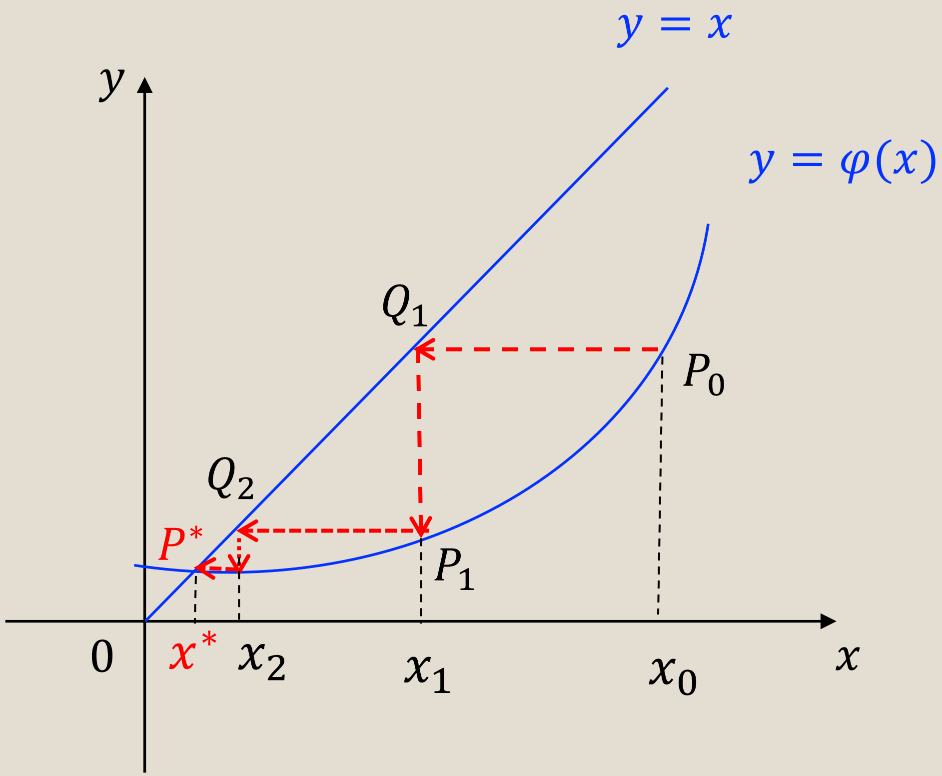
$f(x)$ 零点 ⟺ $\varphi(x)$ 不动点

构造算法：

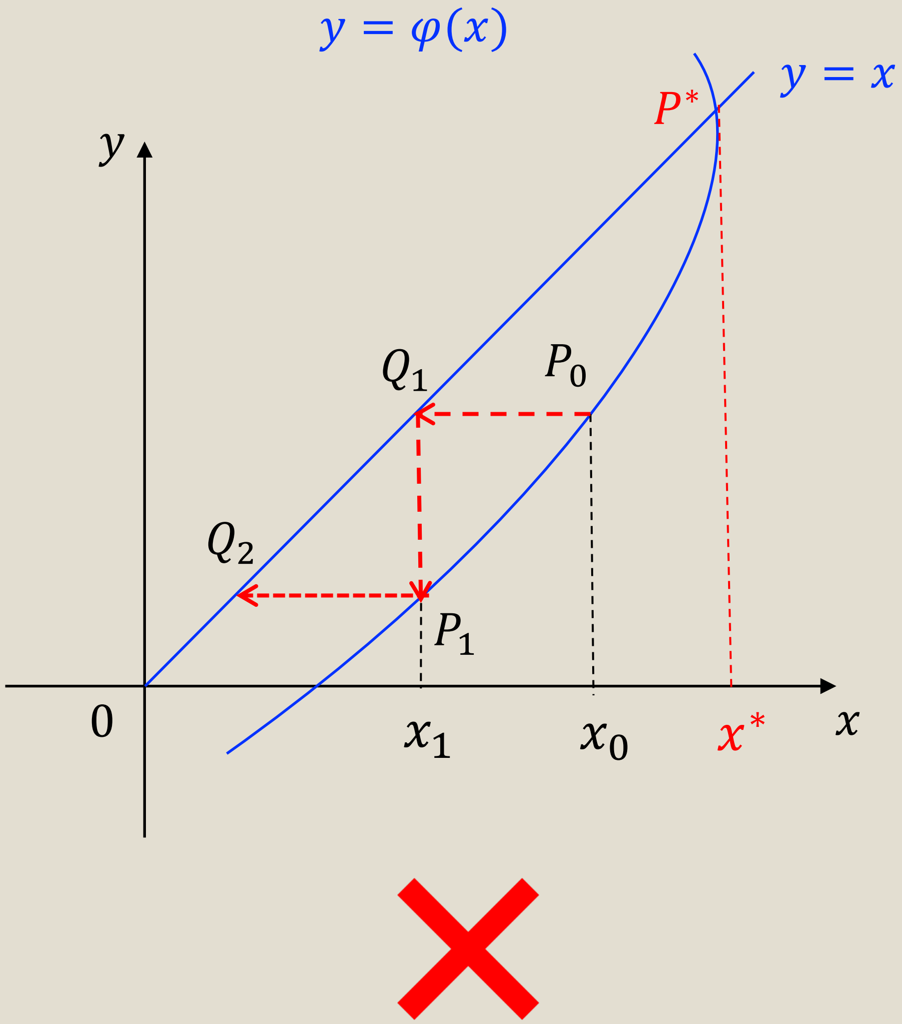
$$x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

注记：$\varphi(x)$ 决定收敛性！

几何意义：曲线 $y=\varphi(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点



y = x
y = φ(x)
y
Q1
P0
Q2
P*
P1
0
x*
x2
x1
x0
x



y = φ(x)
y = x
P*
y
Q1
P0
Q2
P1
0
x1
x0
x*
x

4.1 收敛性分析

定理：若 $\varphi(x)$ 连续且迭代数列满足

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^*$$

则不动点迭代**收敛**，且 x^* 为 $f(x)=0$ 的解.

证明：

$$x^* = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \varphi(x_k) = \varphi\left(\lim_{k\to+\infty} x_k\right) = \varphi(x^*)$$

4.2　存在唯一性

定理：若 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且

（1）对 $\forall x \in [a,b]$，有 $\varphi(x) \in [a,b]$

（2）$\exists\, L \in (0,1)$，使得 $\forall x, y \in [a,b]$ 有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x-y|$$（Lipschitz条件）

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x^*

提示：$|x_1^* - x_2^*| = |\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)|$

$$\le L|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$$

4.3 收敛性定理

提示：

1. $|x_k - x^*| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| \le L^k|x_0 - x^*|$

2. $|x_{k+p} - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|\ (p \to +\infty)$

定理：若 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 且

（1）对 $\forall x \in [a,b]$，有 $\varphi(x) \in [a,b]$

（2）$\exists\, L \in (0,1)$，使得 $\forall x, y \in [a,b]$ 有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y|$$

则 $\forall x_0 \in [a,b]$，迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$收敛，且

$$|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

4.4 收敛性推论

推论：若 $\varphi(x) \in C^1[a,b]$ 且

（1）对 $\forall x \in [a,b]$，有 $\varphi(x) \in [a,b]$

（2）对 $\forall x \in [a,b]$ 有

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

非充要条件！

则不动点存在唯一，且迭代收敛，有前述估计式.

注记：$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)(x-y)| \le L|x-y|$

例2 求 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $[1,2]$ 内的实根.

解： （1）$\varphi(x)=x^3-1$，可得 $\varphi(x)\in[0,7]$

思考：编程实践

$\varphi'(x)=3x^2$，可得 $|\varphi'(x)|>1$，迭代式不一定可行！

（2）$\varphi(x)=\sqrt[3]{x+1}$，可得 $\varphi(x)\in[1,2]$

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$，可得 $|\varphi'(x)|\le\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{0.25}<1$，迭代式可用！

4.5 局部收敛性

定义：设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\exists x^*$ 的 δ-邻域 $U_{\delta(x^*)} = [x^* - \delta, x^* + \delta]$，对 $\forall x_0 \in U_\delta(x^*)$，不动点迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 的点列都收敛到 x^*，则称迭代**局部收敛**.

定理：设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi(x)$ 在 x^* 的某邻域内**连续**，且

$$|\varphi'(x^*)| < 1$$

则不动点迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ **局部收敛**.

4.6 收敛速度

定义：设不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛到 x^*，记 $e_k=x_k-x^*$，若

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$$

其中常数 $C>0$，则称该迭代为 p-阶收敛.

（1）当 $p=1$ 且 $0<C<1$ 时，**线性收敛**

（2）当 $p=2$ 时，二次收敛（平方收敛）

（3）当 $p>1$ 或 $p=1$ 且 $C=0$ 时，**超线性收敛**

4.7　收敛阶的判断

定理：设 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 $U_{\delta(x^*)}$ 连续，

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0，\ \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

则迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p 阶局部收敛的，且

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(x_{k+1} - x^*)}{(x_k - x^*)^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

提示：Taylor展开 $\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p \Longrightarrow \frac{(x_{k+1} - x^*)}{(x_k - x^*)^p} = \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}$

例3 求 $f(x)=x^2-3=0$ 的正根 $\sqrt{3}$.

思考：编程对比

解：（1）$\varphi(x)=x^2-3+x$，可得 $\varphi'(x^*)=2\sqrt{3}+1>1$

（2）$\varphi(x)=x-\dfrac{x^2-3}{4}$，可得 $\varphi'(x^*)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1$

（3）$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$，可得 $\varphi'(x^*)=0$，$\varphi''(x^*)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$

4.8 Aitken（埃特金）加速

$$x_1 = \varphi(x_0) \Longrightarrow x_1 - x^* = \varphi(x_0) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi_1)(x_0 - x^*)$$

$$x_2 = \varphi(x_1) \Longrightarrow x_2 - x^* = \varphi(x_1) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi_2)(x_1 - x^*)$$

若 $\varphi'(x)$ 变化不大，则假定：$\varphi'(\xi_1) \approx \varphi'(\xi_2)$，那么

$$\frac{x_1 - x^*}{x_2 - x^*} \approx \frac{x_0 - x^*}{x_1 - x^*} \Longrightarrow x^* \approx x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} := \bar{x}_1$$

Aitken 加速： $\bar{x}_{k+1} = x_k - \dfrac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$

4.9 Steffenson（斯特芬森）加速

算法思想：将Aitken加速技巧与不动点迭代结合

已知：$y_k = \varphi(x_k)$，$z_k = \varphi(y_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}$$

Steffensen 加速：$x_{k+1} = \psi(x_k)$，$\psi(x) = x - \dfrac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi\big(\varphi(x)\big) - 2\varphi(x) + x}$

4.10 收敛性分析

定理：（1）若 x^* 是 $\psi(x)$ 的不动点，则 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点

（2）若 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，且 $\varphi''(x)$ 存在，$\varphi'(x^*) \neq 1$

则 x^* 是 $\psi(x)$ 的不动点

注记：

1. 若原迭代 $\boldsymbol{p}$ 阶收敛，则 Steffensen 迭代 $\boldsymbol{p+1}$ 阶收敛
2. 原迭代**不收敛**，Steffensen 迭代**可能收敛**

例4 用 Steffensen 迭代法求

思考：编程对比直接不动点迭代

（1）$f(x)=x^3-x-1=0$ 在 [1,2] 的根（取 $\varphi(x)=x^3-1$）

（2）$f(x)=3x^2-e^x=0$ 在 [3,4] 的根（取 $\varphi(x)=2\ln x+\ln 3$）

```
第 1 步  迭代值为：1.500000，函数值为：0.875000
第 2 步  迭代值为：1.416293，函数值为：0.424629
第 3 步  迭代值为：1.355650，函数值为：0.135748
第 4 步  迭代值为：1.328949，函数值为：0.018114
第 5 步  迭代值为：1.324804，函数值为：0.000369
第 6 步  迭代值为：1.324718，函数值为：0.000000
```

```
第 1 步  迭代值为：3.500000，函数值为：3.634548
第 2 步  迭代值为：3.738353，函数值为：-0.102862
第 3 步  迭代值为：3.733081，函数值为：-0.000045
```

Ch7_2ex4_Steffensen.m

小结

非线性方程数值解法

- 二分法
  - 收敛性
- 不动点迭代
  - 收敛性
  - 存在唯一性
  - 收敛阶
  - 加速方法

习题与编程题见课程网页：

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] K. Liu et. al, A Parallel Radial Bisection Algorithm for Inverse Scattering Problems, Inverse Problems in Science and Engineering 21(2012), 197-209.