第六章　非线性方程(组)数值解法

——Newton法及其衍生方法与非线性方程组解法

刘可伋

上海财经大学 数学学院

一、Newton 法

基本思想：非线性问题 → 线性化

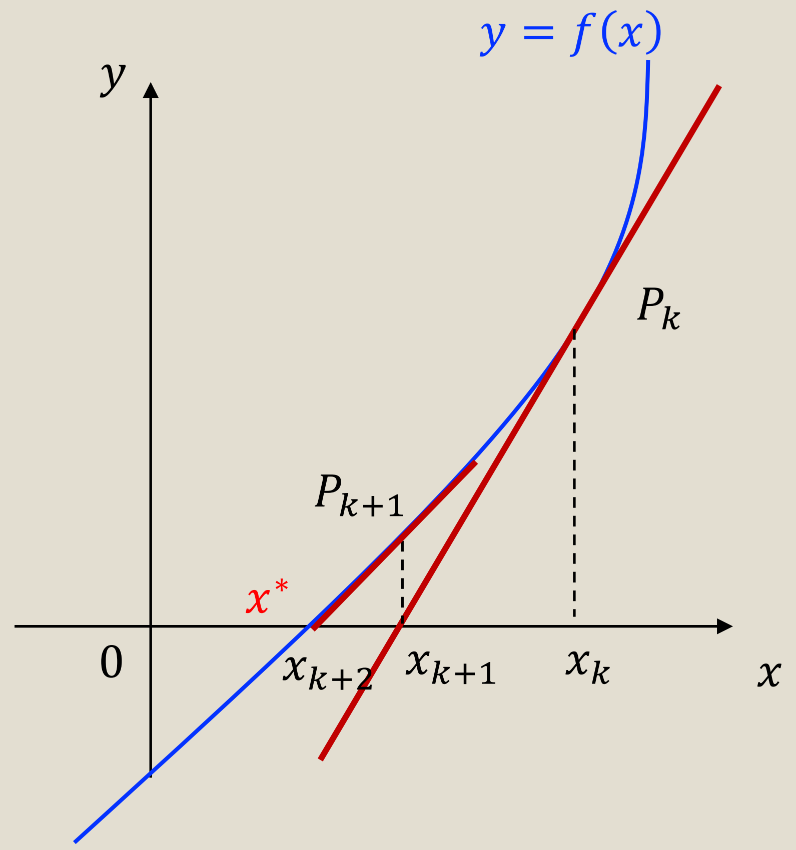
设 x_k 是 $f(x)=0$ 的近似解，将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x^*)^2\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

由 $f(x)=0$ 可得

Newton迭代法：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，其中$f'(x)\neq 0$

二、几何意义与算法



注记：Newton 法也称**切线法**；为不动点迭代

Newton 法

(1) 选初值 x_0

有哪些？

(2) 若满足**停止条件**，则停止，否则

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

思考：优缺点？

例1 用 Newton 法求 $f(x) = xe^x - 1 = 0$ 的根

解： 令 $f(x) = x - e^{-x}$，则 $f'(x) = 1 + e^{-x} = 1 + x$， 取$x_0 = 0.5$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + x_k}$$

k	x_k
0	0.5
1	0.57102
2	0.56716
3	0.56714

思考：编程对比直接不动点迭代

2.1 收敛性分析

迭代函数：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

可知 $\varphi'(x^*) = 0$，$\varphi''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$，所以

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{\varphi''(x^*)}{2!} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

注记：牛顿法至少二阶局部收敛！

例2 讨论 Newton 法求 $f(x)=x^2-C=0\ (C>0)$ 的根的收敛性

解： 迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-C}{2x_k}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{C}{x_k}\right)$$

思考：

1. $x_0<0$ 呢？
2. 重根呢？

$$\Rightarrow\quad x_{k+1}-\sqrt{C}=\frac{1}{2x_k}\left(x_k-\sqrt{C}\right)^2,\quad x_{k+1}+\sqrt{C}=\frac{1}{2x_k}\left(x_k+\sqrt{C}\right)^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x_{k+1}-\sqrt{C}}{x_{k+1}+\sqrt{C}}=\left(\frac{x_k-\sqrt{C}}{x_k+\sqrt{C}}\right)^2=\left(\frac{x_{k-1}-\sqrt{C}}{x_{k-1}+\sqrt{C}}\right)^4=\cdots=\left(\frac{x_0-\sqrt{C}}{x_0+\sqrt{C}}\right)^{2^{k+1}}$$

$$x_k-\sqrt{C}=2\sqrt{C}\,\frac{q^{2^k}}{1-q^{2^k}}\quad\left(q:=\frac{x_0-C}{x_0+C}\right)\ \overset{\text{收敛}}{\Longleftrightarrow}\ |q|<1\Leftrightarrow x_0>0$$

2.2 简化 Newton 法

基本思想：用 $f'(x_0)$ 代替 $f'(x_k)$，减少导数计算

迭代格式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$$

优点：只需计算一次导数

缺点：若收敛，则仅线性收敛

2.3 Newton 下山法

基本思想：局部收敛 ➡ 全局收敛，即要求 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$

迭代格式：

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

λ 为下山因子：从 $\lambda = 1$ 开始，逐次减半，直到满足 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$

2.4　重根情形

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x) \text{ 且 } g(x^*) \neq 0 \implies x^* \text{为 } m \text{ 重零点}$$

方法一（Newton 法）：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \varphi'(x^*) = 1 - \frac{1}{m}$$（**线性收敛**）

方法二（改进 Newton 法）：

未知

$$\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}, \quad \varphi'(x^*) = 0$$（**二阶收敛**）

方法三（等价方程法）：

令 $\mu(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则 x^* 是 $\mu(x)=0$ 的单根

迭代函数：

$$\varphi(x)=x-\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}=x-\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}$$

迭代格式：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$

例3 求 $f(x)=x^4-4x^2+4=0$ 的二重根 $x^*=\sqrt{2}$

解：

（1）Newton 法：$\varphi_1(x)=x-\dfrac{x^2-2}{4x}$

（2）改进 Newton 法：$\varphi_2(x)=x-\dfrac{x^2-2}{2x}$

（3）等价方程法：$\varphi_3(x)=x-\dfrac{x(x^2-2)}{x^2+2}$

```
第 1 步
 Newton法：xk=1.45833, f(xk)=0.016062
 改进Newton法：xk=1.41667, f(xk)=4.82253e-05
 等价方程法：xk=1.41176, f(xk)=4.78921e-05,

第 2 步
 Newton法：xk=1.43661, f(xk)=0.00407556
 改进Newton法：xk=1.41422, f(xk)=3.60877e-11
 等价方程法：xk=1.41421, f(xk)=3.60875e-11,

第 3 步
 Newton法：xk=1.4255, f(xk)=0.00102678
 改进Newton法：xk=1.41421, f(xk)=2.03487e-23
 等价方程法：xk=1.41421, f(xk)=2.03487e-23,

第 4 步
 Newton法：xk=1.41988, f(xk)=0.000257709
 改进Newton法：xk=1.41421, f(xk)=6.46982e-48
 等价方程法：xk=1.41421, f(xk)=6.46982e-48,

第 5 步
 Newton法：xk=1.41705, f(xk)=6.45555e-05
 改进Newton法：xk=1.41421, f(xk)=6.5404e-97
 等价方程法：xk=1.41421, f(xk)=6.5404e-97,
```

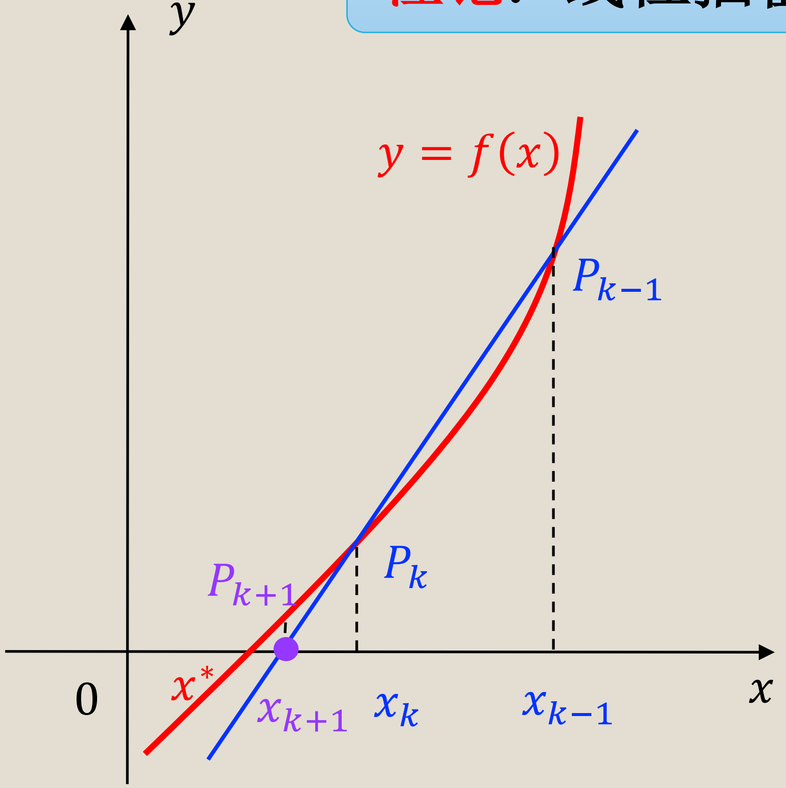
Ch7_3ex3.m

三、割线法

算法思想：**割线**代替**切线**，避免计算导数，并保持较高收敛阶

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

注记：线性插值



割线法（弦截法）：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

3.1　割线法收敛性

定理：设 x^* 是 $f(x)$ 零点，$f(x)$ 在 $U_{\delta(x^*)}$ 内二阶连续可导，且 $f'(x) \neq 0$，

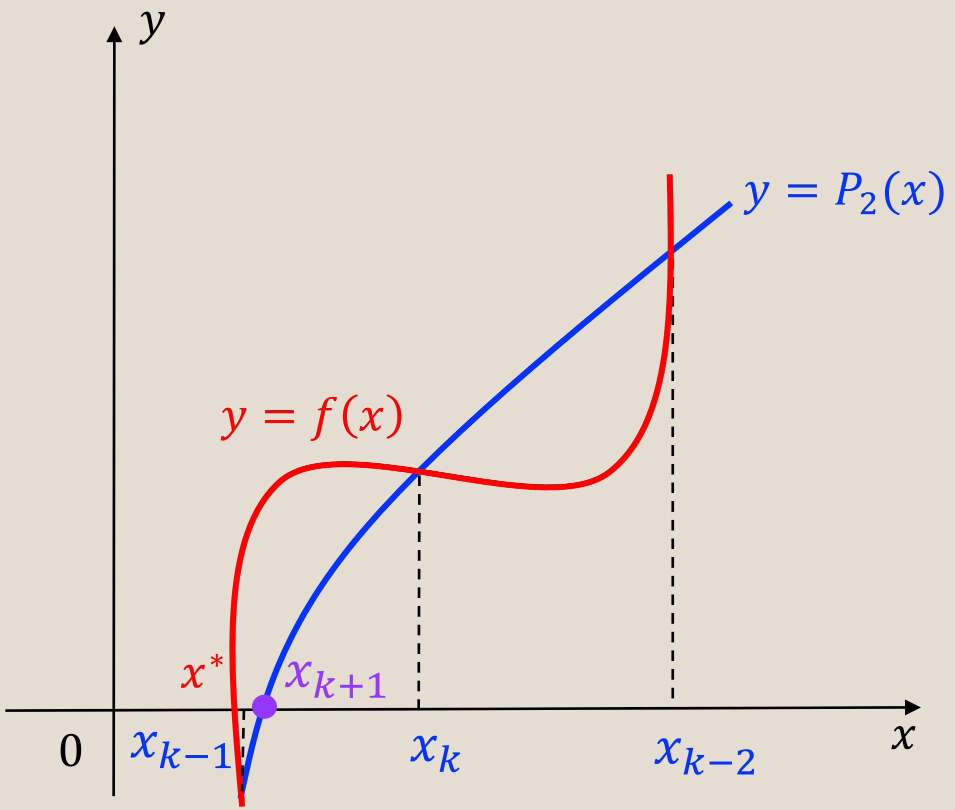
若 $x_0, x_1 \in U_{\delta(x^*)}$，当 δ 充分小，割线法 p 阶收敛：

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

注：p 是 $p^2 - p - 1 = 0$ 正根

四、抛物线法（Müller法）

算法思想：抛物线近似 $f(x)$，避免计算导数，并保持较高收敛阶



注记：三点二次插值

4.1 抛物法收敛性

抛物线方程（三点Newton插值）：

$$P_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})$$

$P_2(x)$ 与 x 轴两个交点，取靠近 x_k 作为 x_{k+1}

注：一定条件下，抛物线法 p 阶收敛：

$$p \approx 1.840$$

其中 p 是 $p^3 - p^2 - p - 1 = 0$ 正根；抛物线法可求复根

五、求根问题的敏感性

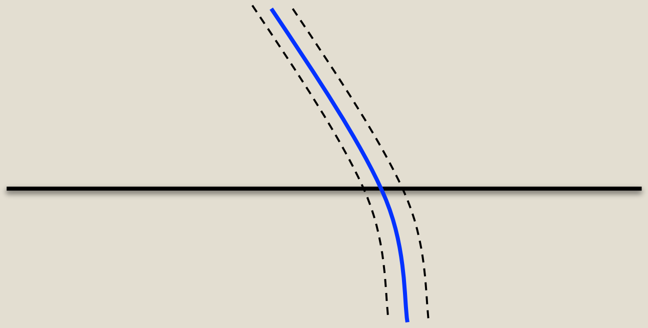
问题：求 $f(x)=0$ 的根

分析：若 $\bar{x}$ 满足 $|f(\bar{x})|\leq\varepsilon$，误差 $|\Delta x|=|\bar{x}-x^*|$，$|\Delta y|=|f(\bar{x})-f(x^*)|$，则

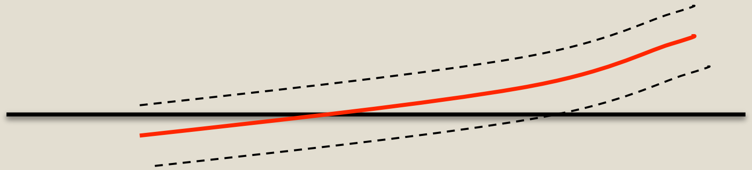
$$\frac{|\Delta x|}{|\Delta y|}\approx\frac{1}{|f'(x^*)|}$$

$|\Delta x|\approx\varepsilon/|f'(x^*)|$，若 $|f'(x^*)|$ 非常小，则误差 $|\Delta x|$ 非常大

良态



病态



六、非线性方程组数值解法

令 $F(x)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ \qquad\vdots \\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

可简化为 $F(x)=0$

Jacobi矩阵：

$$F'(x)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}$$

注记：1. $F(x)$ 在 x^* 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x^*}F(x)=F(x^*)$

2. $F(x)$ 在 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 连续 $\Longleftrightarrow F(x)$ 在 D 内每点连续

6.1 不动点迭代

构造 $F(x) = 0$ 的等价方程组：$x = \Phi(x)$，则 $F(x)$ 零点等价于 $\Phi(x)$ 不动点

迭代格式：

$$x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right)$$

设 $\Phi(x)$ 连续，若

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x^*$$

由 $\Phi(x)$ 连续性得 $x^* = \Phi(x^*)$，则 $F(x^*) = 0$

6.2 不动点迭代的收敛性

定理：设 $\Phi(x)$ 在 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 内有定义，且

（1）$\exists$ 闭集 $D_0 \subseteq D$， $L \in (0,1)$，使得

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le L\|x - y\|, \ \forall x, y \in D_0$$

（2） $\forall x \in D_0$ 有 $\Phi(x) \in D_0$

则 $\Phi(x)$ 在 D_0 存在唯一不动点 x^* ，$\forall x^{(0)} \in D_0$ 迭代都收敛到 x^*，且

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

定理：设 x^* 是 $\Phi(x)$ 不动点，$\Phi(x)$ 在 $U_{\delta(x^*)}$ 存在连续偏导数，且

$$\rho\left(\Phi'(x^*)\right) < 1$$

则存在 x^* 邻域 D_0，对 $\forall x^{(0)} \in D_0$ 都迭代收敛至 x^*

注：$\rho\left(\Phi'(x^*)\right)$为 $\Phi(x)$ 的Jacobi矩阵的谱半径

6.3 收敛速度

定义：设迭代序列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛到 x^*，若

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\left\|x^{(k+1)}-x^*\right\|}{\left\|x^{(k)}-x^*\right\|^{p}}=C$$

其中常数 $C>0$，则称该迭代为 p-阶收敛.

（1）当 $p=1$ 且 $0<C<1$ 时，**线性收敛**

（2）当 $p=2$ 时，二次收敛（平方收敛）

（3）当 $p>1$ 或 $p=1$ 且 $C=0$ 时，**超线性收敛**

6.4 Newton 迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F\left(x^{(k)}\right)}{F'\left(x^{(k)}\right)}$$

定理：设 x^* 是 $F(x)$ 零点，$F(x)$ 在 $U_{\delta(x^*)}$ 存在连续偏导数，若 $F'(x^*)$ 非奇异，则存在 x^* 的闭邻域 S，使得Newton迭代序列都**超线性收敛**至 x^*，若

$$\|F'(x) - F'(x^*)\| \leq L\|x - x^*\|，\forall x \in S，\ L \in (0,1)$$

则Newton迭代序列至少平方收敛至 x^*

例4 用Newton法求解

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

解:

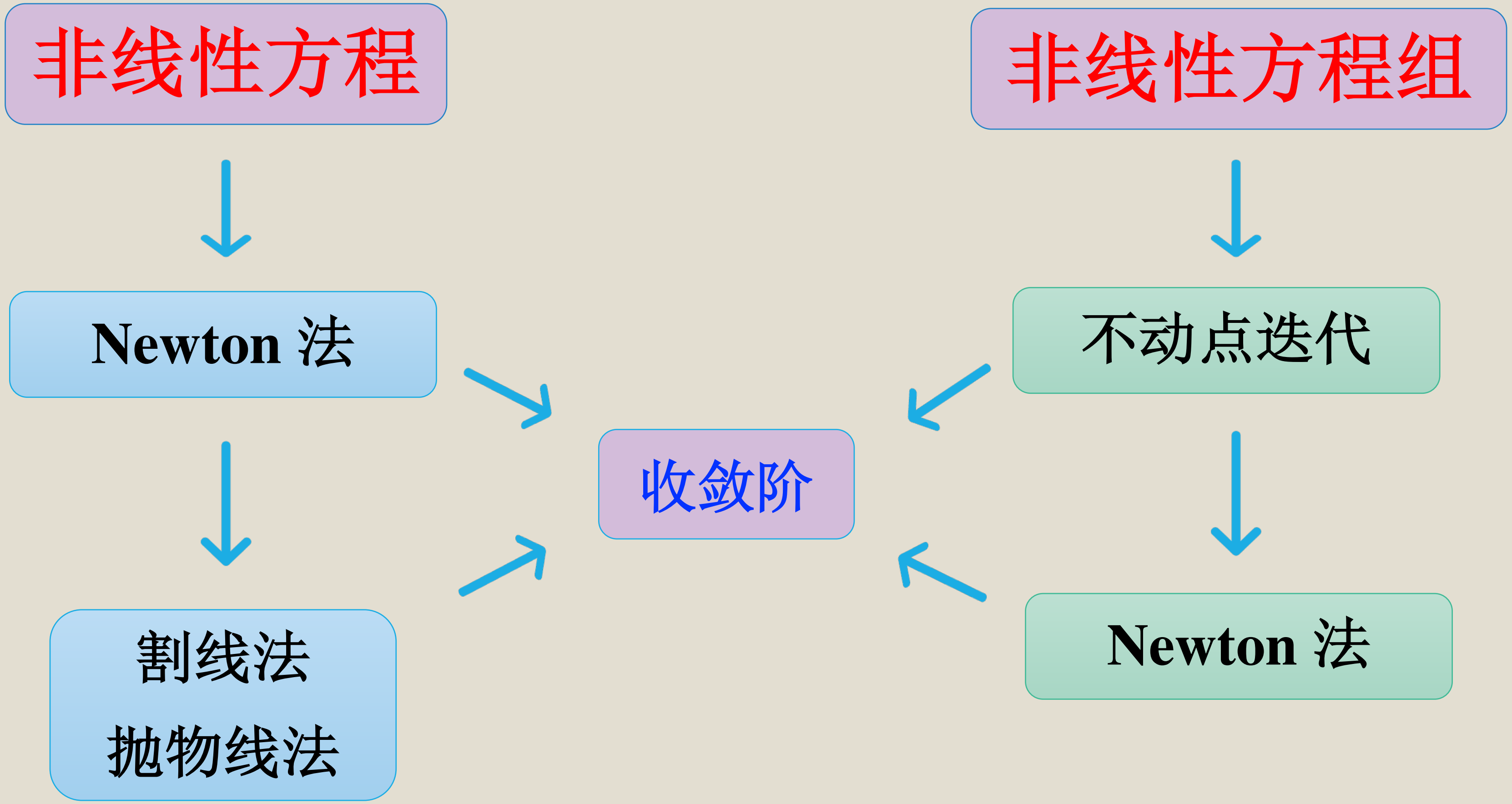
$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 \end{bmatrix}, \quad F'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 10 & 2x_2 \\ x_2^2 + 1 & 2x_1x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

取 $x_0 = (0,0)^T$，迭代可得

```
第 1 步 x1=0, x2=0, F=[8,8]

第 2 步 x1=0.8, x2=0.88, F=[1.4144,0.61952]

第 3 步 x1=0.991787, x2=0.991712, F=[0.0492619,0.0500848]

第 4 步 x1=0.999975, x2=0.999969, F=[0.000135218,0.000202265]

第 5 步 x1=1, x2=1, F=[1.60427e-09,2.54996e-09]
```

Ch7_4ex4.m

小结



习题与资料见Canvas课程网页

1、参考书目

[1]《第三种科学方法：计算机时代的科学计算》，石忠慈著，清华大学出版社，2000

[2]《数值分析》，张平文等著，北京大学出版社，2007

[3]《数值分析》，冯烟利等译，高等教育出版社，2005

2、网络学习资源

(1) https://www.icourse163.org/course/NEU-1002089009?from=searchPage《数值分析》精品课程

(2) https://uk.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf（MATLAB入门）

(3) https://www.icourse163.org/course/CSU-1002475002?from=searchPage《科学计算与MATLAB语言》精品课程

3、拓展性参考文献

[1] H. Ammari et. al, Optimal Shape Design by Partial Spectral Data, SIAM J. Scientific Computing 37(2015), B855-B883