

数值积分方法在 Heston 期权定价模型中的应用

摘要

期权定价的问题的研究是金融市场研究中的一个重要问题。本文根据已有的期权定价理论，基于 Heston 期权定价模型，利用多种数值积分的方法求解期权定价问题，并对求解结果进行误差分析，通过将所求期权定价结果与真实期权价格进行比较，最终得到相对较优的期权定价方案。

本案例适用于应用理科数学类专业、金融学专业及其相关领域本科生、研究生的课程教学，如《数值分析》、《现代计算方法》等，也适用于数学和交叉学科研究生开展科研训练。

关键词：期权定价 数值积分方法 Heston 模型 龙贝格外推

问题背景

众所周知，如今，在金融衍生物市场中，期权有着不可或缺的地位，因而期权定价的问题吸引了众多学者的眼球。早在 1900 年法国金融专家劳雷斯·巴舍利耶就发表了第一篇关于期权定价的文章，此后各种关于期权定价的公式被频繁提出，但都各有缺点和局限性。1973 年 Fisher Black 和 Myron Scholes 就提出了第一个完整的期权定价模型——B-S 期权定价模型，并假设标的资产价格服从对数正态分布，无风险利率和波动率常数是恒定的，这使得期权定价问题取得了突破性的进展。

然而，在实际市场中，由于波动率一般不为常数，且资产价格分布较正态分布通常有着尖峰厚尾的特点，在实际交易中对于尾部风险的把控尤为重要，而这些都是 BS 模型无法解决的问题，故经济学家们又提出了随机波动率模型，即对标的资产价格和波动率建立随机微分方程组，并且在其中加入两个独立的几何布朗运动，本文所研究的内容就是在此基础上发展出的 Heston 期权定价模型。模型利用多种数值积分的方法来对此模型进行求解，并对这些积分的误差情况进行理论分析，然后将结合实际情况给出的期权定价与真实的期权价格进行比较，最终得出一个相对较优的期权定价方案。

模型建立

首先，给出 Heston 期权定价模型的具体表达形式：

$$\begin{cases} dS(t) = S(t)r dt + S(t)\sqrt{v(t)}dW_t^1, \\ dv(t) = \eta(\theta - v(t))dt + \sigma_v\sqrt{v(t)}dW_t^2. \end{cases}$$

其中， $S(t)$ 为标的资产价格函数， $v(t)$ 为波动率函数， r 为无风险利率， θ 为波动率均衡水平， η 为波动率均值回复速率， σ_v 为波动率过程的方差， W_t^1, W_t^2 为两个几何布朗运动， ρ 为它们的相关系数。

为了消除两个布朗运动的相关性，利用伊藤公式作代换：

$$X(t) = \log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) - \frac{\rho}{\sigma_v}(v(t) - v(0)) - \left(r - \frac{\rho\eta\theta}{\sigma_v}\right)t.$$

做过变量代换后，经过一系列比较复杂的积分变换（与本文核心内容无关，不再赘述），可以解出 $X(t)$ 和 $v(t)$ 的关系式如下：

$$X(t_n) = X(0) + \left(\frac{\rho\eta}{\sigma_v} - \frac{1}{2}\right) \int_0^{t_n} v(s) ds + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^{t_n} \sqrt{v(s)} dW_s^*.$$

在上式中由于 $X(0) = 0$, W_s^* 为布朗运动, 故可将上式变换为如下情形:

$$X(t_n) = \left(\frac{\rho\eta}{\sigma_v} - \frac{1}{2}\right) \int_0^{t_n} v(s) ds + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\int_0^{t_n} v(s) ds} * Z.$$

其中 Z 为标准正态分布变量, 由卷积及布朗运动的性质, 可以得出 $X(t_n)$ 服从正态分布, 即 $X(t_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中

$$\mu = \left(\frac{\rho\eta}{\sigma_v} - \frac{1}{2}\right) \int_0^{t_n} v(s) ds, \quad \sigma = \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\int_0^{t_n} v(s) ds}.$$

根据上式 $X(t_n)$ 的具体分布表达式, 模型已建立完毕, 接下来须对积分项 $\int_0^{t_n} v(s) ds$ 进行数值方法的求解, 进而求出 $X(t_n)$ 的具体值.

模型求解

积分求解的数值方法有很多种, 其中较为简单的有梯形公式, 辛普森公式, 当数据量足够时, 也可以尝试使用复合的梯形公式以及辛普森公式, 进而可以使用龙贝格外推的方法继续提高精度. 由于只有整数天的价格信息数据, 故高斯-勒让德求积公式以及高斯-切比雪夫求积公式都因为要求无理数的节点数据而无法实现.

给出人福医药股票 2020 年年初至现在共两年的股票几个变动数据, 以股票一天的价格均值作为股票当日的价格, 并以其当日涨跌幅作为当日的波动率. 首先, 在数据预处理中, 采用最小二乘拟合的方式补齐数据缺失值.

在数据预处理时, 用多项式函数做最小二乘拟合, 记 $v(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \dots + a_1 t + a_0, t \in [t', t'']$. 对于区间 $[t', t'']$ 上的已知点 $(t_u, v(t_u)), (t_{u+1}, v(t_{u+1})), \dots, (t_{u+k}, v(t_{u+k}))$, 通过求解线性方程组

$$\sum_{l=0}^m \left(a_l \sum_{i=1}^k t_{u+i}^{j+l} \right) = \sum_{i=1}^k v(t_{u+i}) t_{u+i}^j, j = 1, 2, \dots, m$$

可得到待定系数 a_0, a_1, \dots, a_m 的取值, 然后用拟合函数上的点作为缺失的点, 并将偏离曲线较远的点 (即“坏点”) 替换成曲线上的点.

用 Matlab 将预处理后的时间与价格、时间与波动率的关系画图如图 1 所示:

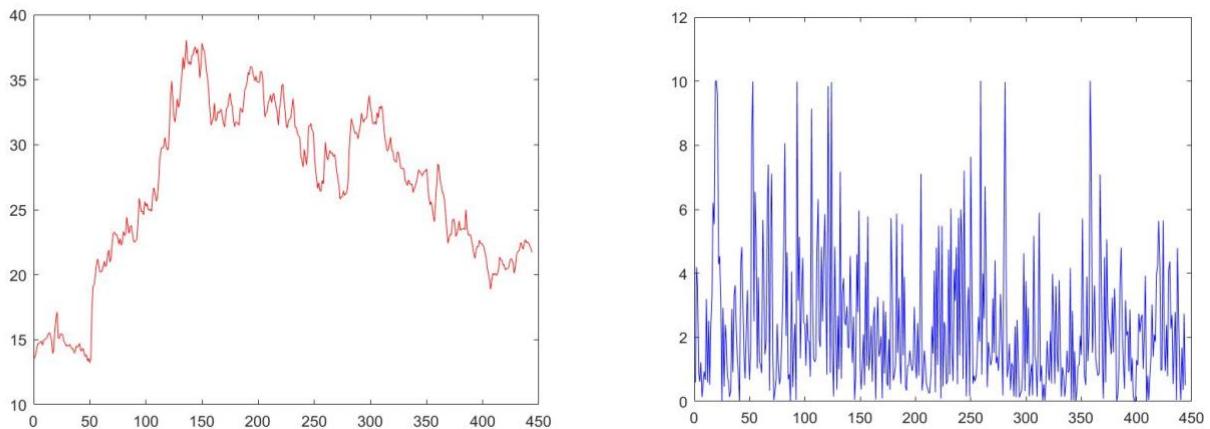


图 1

其中红色的为价格随时间变化的曲线, 蓝色的为波动率随时间变化的曲线.

首先考虑最简单的梯形公式情况，即

$$\int_0^{t_n} v(s) ds = \frac{v(t_n) + v(0)}{2} t_n.$$

代入 $X(t_n)$ 的分布中，可得 $X(t_n) \sim N\left(\left(\frac{\rho\eta}{\sigma_v} - \frac{1}{2}\right) \frac{v(t_n) + v(0)}{2} t_n, (1 - \rho^2) \frac{v(t_n) + v(0)}{2} t_n\right)$. 这样就可以代入其余常数的数据（一般取： $(\eta, \theta, \sigma_v, \rho, r) = (3, 0.04, 0.10, -0.10, 0.05)$ ）求出其具体分布，并由 $X(t_n)$ 和 $S(t_n)$ 之间的关系，再做逆变换：

$$S(t_n) = S(0) e^{X(t_n) + \frac{\rho}{\sigma_v}(v(t_n) - v(0)) + (r - \frac{\rho\eta\theta}{\sigma_v})t_n}.$$

可以用正态分布的期望值来代替需要的价格结果，经计算得具体结果如图 2 所示。

此时所算出的分布与实际中所预期的相差甚远，故采用辛普森公式改进梯形公式，即

$$\int_0^{t_n} v(s) ds = \frac{v(t_n) + 4v(\frac{t_n}{2}) + v(0)}{6} t_n.$$

则此时可有 $X(t_n) \sim N\left(\left(\frac{\rho\eta}{\sigma_v} - \frac{1}{2}\right) \frac{v(t_n) + 4v(\frac{t_n}{2}) + v(0)}{6} t_n, (1 - \rho^2) \frac{v(t_n) + 4v(\frac{t_n}{2}) + v(0)}{6} t_n\right)$, 同梯形

公式的计算方法，计算出结果如图 3 所示：

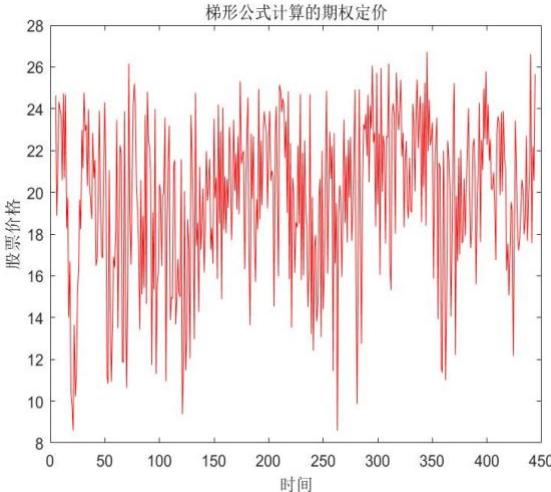


图 2

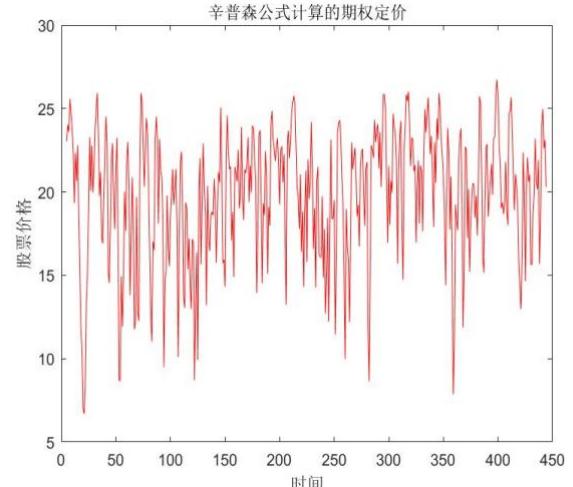


图 3

从以上结果可以看出，虽然辛普森公式的计算结果已经比梯形公式要好，但仍与实际的结果相差很多，故需要更高精度的求积公式来求解。首先，尝试复合的梯形公式和辛普森公式，由于最终表达式的指数项中存在 t_n ，故不能将步长取得太长，经过多次尝试，发现取 $h = 6$ 时可得最好的计算结果，并取步长为 1. 由复合梯形公式的计算公式为

$$\int_0^{t_n} v(s) ds = \frac{h}{2} \left[v(t_1) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} v(t_1 + ih) + v(t_n) \right].$$

同时尝试使用复合辛普森计算公式，同梯形公式的计算方法，取步长 $h = 2$ ，则复合辛普森公式的计算公式为：

$$\int_0^{t_n} v(s) ds = \frac{h}{6} \left[v(t_1) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} v(t_1 + 2ih) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} v(t_1 + (2i-1)h) + v(t_n) \right].$$

分别将两种公式代入原模型中进行求解，得出其计算结果如图 4：

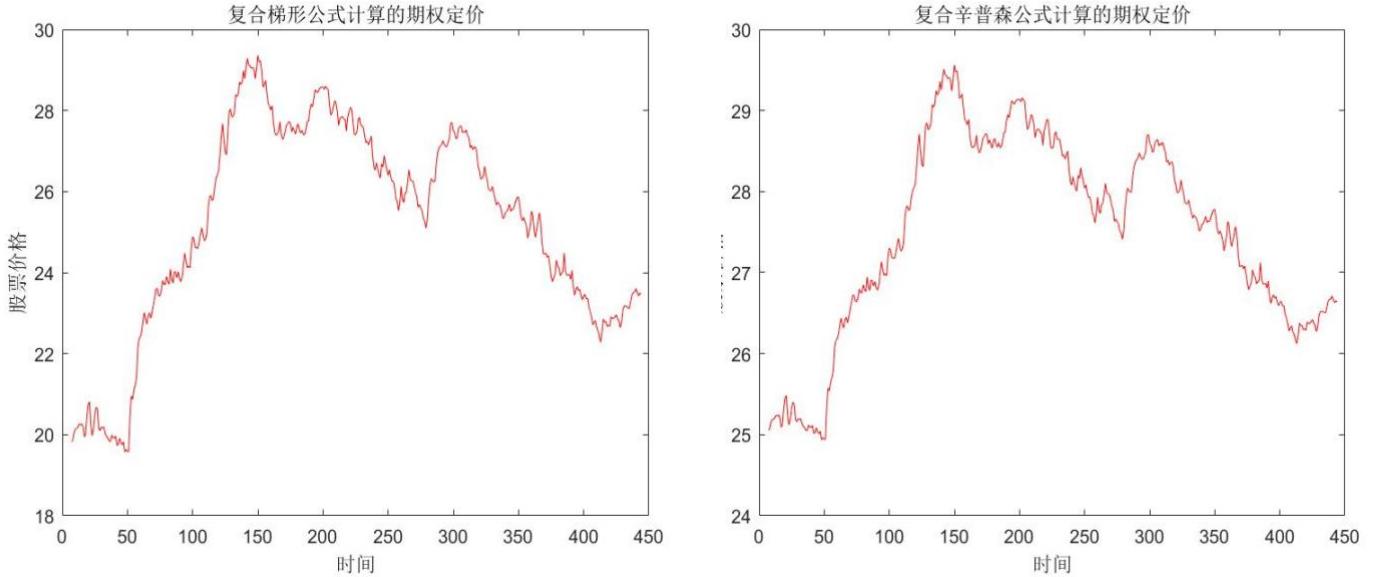


图 4

从以上计算结果可以看出，复合梯形公式和复合辛普森公式已经给出了较好的拟合结果，但是仍然存在较大的数据差异。下面考虑使用龙贝格积分的方法，将步长减半，节点个数增多。龙贝格算法由复合梯形公式经 Richardson 外推得到，具有更高的精度：

取 $h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$ ，由复合梯形公式，有

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2} (v(t_1) + v(t_n)),$$

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left(R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} v(t_1 + (2i-1)h_k) \right).$$

求积余项 $\int_0^{t_n} v(s) ds - R_{k,1} = \sum_{i=1}^{\infty} k_i h_k^{2i}$ 满足 Richardson 外推格式，因此有外推形式

$$R_{k,j} = \frac{4^{j-1} R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, j = 2, 3, \dots$$

经过实验发现，只需要增加两次节点个数即可达到比较好的拟合效果，将拟合完成的价格随时间变化的图像和实际图像画在一张图中进行对比，如图 5

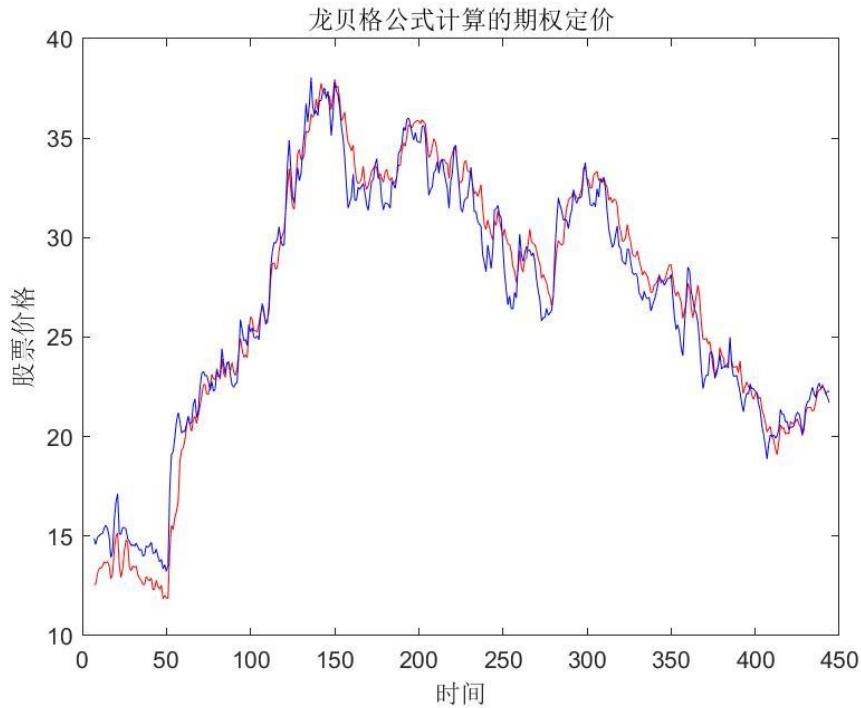


图 5

在此图中，蓝线为实际价格，红线为龙贝格外推方法拟合后所得出的价格，可以看到两条曲线的值以及走向趋势基本相同，拟合程度很好。下文将对以上几种积分计算方式所产生的误差给出理论分析和实际对比。

误差分析

首先可以清晰地看到，只用辛普森公式和梯形公式时，由于公式中所涉及到的节点数过少，且该股票的涨跌幅度较大，最终的计算结果必然比实际结果相差很大，即使辛普森公式相对于梯形公式已经将代数精度提高了 2 级，仍然会使计算结果出现幅度特别大的摆动。故而使用复合梯形公式和复合辛普森公式时，通过增加节点的数量提高公式的精度，并使用龙贝格外推方法成倍增加节点数量继续提高代数精度。由课上知识可知各种积分方法的余项，分别算出拟合结果与实际结果插值绝对值的方差，并将结果做成如下表：

	梯形公式	辛普森公式	复合梯形公式	复合辛普森公式	龙贝格外推方法
理论误差	$-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$	$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$	$-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$	$-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\eta)$	——
实际误差的均值	8.4281	8.4114	8.6539	7.2536	1.9156
实际误差的方差	100.1015	100.5163	88.8253	80.6163	80.8233

总结与展望

以上在本文的求解过程中，共使用了五种数值积分方法来计算 $X(t_n)$ 表达式中的积分项。可以看到即使理论分析所给出的方法可以大幅增加代数精度，减小误差，最终所计算得出的误差仍然是很大的，平均相对误差大约有 6%，所以证明文中所列算法已经不能再减少误差。进一步地，可以知道只依靠数值积分的方法单纯增加节点数来增加代数精度的方法也是不可行的。但是在误差可以接受的范围内，龙贝格外推算法取得了极大的成效。

从期权定价取得广泛深入的研究以来，经济学家们提出了很多模型，本文所研究的 Heston 模型只是其中较为基础的一种，为了增加模型的精确性与可靠性，许多学者通过增加漂移项，Merton 跳等很多种方式来完善期权定价的刻画。而在他们提出的更复杂的模型中，数值方法的使用也是必不可少的，诸如微分方程数值解，数值求导等方法更是不可或缺。

附录： MATLAB 程序

1. 梯形公式

```
y=x'; % 导入数据
for i=5:444
    z(i)=13.57*exp((-7/2)*(y(i)+y(i-4))/200*4-(y(i)-y(i-4))/100+0.17*4);
end
plot(5:444,z(5:444), 'r')
xlabel('时间')
ylabel('股票价格')
title('梯形公式计算的期权定价')
```

2. Simpson 公式

```
y=x';
for i=5:444;
    w(i)=13.57*exp((-7/2)*(y(i)+y(i-2)+4*y(i-1))/600*4-(y(i)-y(i-2))/100+0.17*4);
end
plot(5:444,w(5:444), 'r')
xlabel('时间')
ylabel('股票价格')
title('辛普森公式计算的期权定价')
```

3. 复合梯形公式

```
y=x'
h=6;
for i=h+1:444;
    w(i)=13.57*exp((-7/2)*(y(i)+y(i-h)+2*sum(y((i-1):(i-h+1))))/200*h-(y(i)-y(1))/100+0.17*h);
end
plot(h+1:444,60-w(h+1:444), 'r')
xlabel('时间')
ylabel('股票价格')
title('复合梯形公式计算的期权定价')
%h=7;
%plot(h+1:444,w(h+1:444), 'g')
%h=6;
%plot(h+1:444,w(h+1:444), 'b')
```

4. 复合 Simpson 公式

```
y=x'  
h=6;  
for i=h+1:444;  
    w(i)=13.57*exp((-7/2)*(y(i)+y(i-h)+4*sum(y((i-1):2:(i-h+1))))+2*sum(y((i-  
2):2:(i-h+2))))/600*h-(y(i)-y(1))/100+0.17*h);  
end  
plot(h+1:444, 93-8/3*w(h+1:444), 'r')  
xlabel('时间')  
ylabel('股票价格')  
title('复合辛普森公式计算的期权定价')  
%h=7;  
%plot(h+1:444, w(h+1:444), 'g')  
%h=6;  
%plot(h+1:444, w(h+1:444), 'b')
```

5. 龙贝格公式

```
y=x', y1=13.57.*y;  
h=6;  
for i=h+1:444;  
    w(i)=13.57*exp((-7/2)*(y(i)+y(i-h)+2*sum(y((i-1):(i-h+1))))/200*h-(y(i)-  
y(1))/100+0.17*h);  
end  
plot(h+1:444, 93-(8/3)*w(h+1:444), 'r', h+1:444, y1(h+1:444), 'b')  
xlabel('时间')  
ylabel('股票价格')  
title('龙贝格公式计算的期权定价')  
%h=7;  
%plot(h+1:444, w(h+1:444), 'g')  
%h=6;  
%plot(h+1:444, w(h+1:444), 'b')
```